Präsenzübung VI zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2015

Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

05.06.2015

DISTRIBUTIONEN & KOMPLEXE FUNKTIONEN

Integration komplexer Funktionen ist ein leistungsfähiges Werkzeug in der theoretischen Physik, das hier etwas geübt werden soll.

[P15] *Die δ-Distribution als Grenzfall*

Zeigen Sie durch Anwenden auf eine Testfunktion $f(x)$, dass gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2(tx)}{tx^2} = \pi\delta(x)\,.$$

Hinweis: $\int \mathrm{d}x \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$.

[P16] *Residuensatz*

Das Residuum einer komplexen Funktion $g(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_\ell\,(z-z_0)^\ell$ am Punkt $z = z_0$ ist der Koeffizient bei $(z-z_0)^{-1}$, also g_{-1}. Der Residuensatz besagt für Wegintegrale über Funktionen $g(z)$, die außer in Polstellen im umlaufenen Gebiet komplex differenzierbar sind, dass

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint \mathrm{d}z\, g(z) = \sum \text{Residuen von } g \text{ im umlaufenen Gebiet}\,.$$

(a) Zeigen Sie hiermit, dass jede bei y analytische Funktion $f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_l\,(z-y)^\ell$ durch ihre Werte auf einem umgebenden Kreis gegeben ist,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint \mathrm{d}z \frac{f(z)}{z-y}\,.$$

Tatsächlich gilt diese Formel für jede im umlaufenen Gebiet komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ und zeigt, dass sie unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Was sind die Residuen an der Stelle $z = y$ von den Funktionen

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-y)}\,,\quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-y)^2}\,,\quad \ldots\quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-y)^n}\,,$$

wenn $g(z)$ bei $z = y$ analytisch ist?

(c) Wo haben die beiden Funktionen

$$f(z) = z^3\,\mathrm{e}^{-1/z} \quad \text{und} \quad f(z) = \frac{5z}{(z-2)(2z^2+1)(z-1)^2}$$

Pole, welche Werte haben dort die Residuen?

[P17] *Komplexer Logarithmus*

In welchem Gebiet ist die komplexe Funktion

$$\ln : z = x + \mathrm{i}y \;\mapsto\; \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

definiert? Ist sie dort komplex differenzierbar? Was ist ihre Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z$? Zur Erinnerung: $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \partial_x u + \mathrm{i}\partial_x v \overset{!}{=} \partial_y v - \mathrm{i}\partial_y u$.