VORBEMERKUNG

Eichtheorien sind in der Sprache der Mathematik durch Strukturen der Differentialgeometrie charakterisiert. Ein Eichfeld ist dann ein Schnitt in einem Prinzipalbündel einer Mannigfaltigkeit M (der Raumzeit) mit Strukturgruppe G (der Eichgruppe). Eine Eichtransformation ist eine Abbildung von einem Schnitt auf einen anderen. Um dies präziser verstehen zu können, müssen wir uns ein wenig durch diese mathematische Struktur durcharbeiten.

MANNIGFALTIGKEIT

Hier wiederholen wir kurz das Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeit und führen einige Notationen ein.

Topologischer Raum. Eine Menge M wird zu einem topologischen Raum, wenn wir in M eine Familie von Teilmengen $\mathcal{O}$ mit folgenden Eigenschaften identifizieren können:

- [M1] Die Vereinigung jeder nicht leeren Familie von Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$.
- [M2] Die leere Menge $\emptyset$ gehört zu $\mathcal{O}$.
- [M3] Die Schnittmenge von zwei Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$.
- [M4] Die Menge M selbst gehört zu $\mathcal{O}$.

Man nennt $\mathcal{O}$ auch *Topologie* von M. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Mengen*. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *Umgebung* von $x \in M$, wenn es ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$ und $O \subset U$ gibt. Man sagt auch, $\mathcal{O}$ ist *feiner* als $\mathcal{O}'$, wenn $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ ist. Eine Familie von Mengen Ω heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, wenn $\Omega \subset \mathcal{O}$ und jede Menge in $\mathcal{O}$ kann als eine Vereinigung von Mengen in Ω dargestellt werden. Eine Familie von Teilmengen Ω des topologischen Raumes M heißt *lokal endlich*, wenn jeder Punkt in M eine Umgebung besitzt, die nur von endlich vielen Mengen aus Ω geschnitten wird. Schließlich heißt ein topologischer Raum *parakompakt*, wenn für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M eine lokal endliche Überdeckung existiert, die feiner als $\mathcal{U}$ ist.

Die Eigenschaft der Parakompaktheit ist in der Theorie der Faserbündel wichtig, weil parakompakte Basismannigfaltigkeiten die Existenz von Zusammenhängen garantieren.

Wir benötigen noch eine Konzept, den *Hausdorff-Raum*. Das ist ein topologischer Raum M, bei dem für jedes $x, y \in M$ mit $x \neq y$ offene Mengen U, V mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren. Grob gesprochen erlaubt uns dies, festzustellen, ob zwei Elemente von M verschieden sind.

Mannigfaltigkeit. Ein Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn er lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Hier bedeute lokal homöomorph, dass jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung besitzt, die homöomoprh zu einer Offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Ein *Homöomorphismus* ist eine stetige 1:1 Abbildung, deren Inverses ebenfalls stetig ist.

Karten. Für jedes $x \in M$ gebe es eine Umgebung U_ι und einen Homöomorphismus φ_ι wie oben beschrieben. Das Paar (U_ι, φ_ι) heißt eine *Karte* von M. Eine Familie ϕ von Karten heißt *Atlas* von M, wenn die Definitionsbereiche U_ι der Abbildungen φ_ι ein Überdeckung von M bilden.

Sei a_i, $i = 1, \ldots, n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die wir im folgenden fest gewählt denken. Die Darstellung einer Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Basis ist

$$\varphi : x \in U \mapsto \varphi(x) = x^i(x) a_i \in \mathbb{R}\,.$$

Man schreibt oft kurz (x^i) für $x^i(x)$. Die $x^i(x)$ heißen *Koordinaten* von $x \in M$ bezüglich der Karte (U, φ). Seien (U_ι, φ_ι) und $(U_\kappa, \varphi_\kappa)$ zwei Karten mit $U_\iota \cap U_\kappa \neq \emptyset$. Ein Punkt $x \in U_\iota \cap U_\kappa$ hat Koordinaten $x^i(x)$ bezüglich (U_ι, φ_ι) und $x^{i'}(x)$ bezüglich $(U_\kappa, \varphi_\kappa)$. Zwischen diesen beiden Koordinatenwahlen gibt es eine Beziehung, gegeben durch die *Koordinaten-Transformation*

$$\varphi_{\kappa\iota} : x^i \in \varphi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa) \mapsto x^{i'} = \varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1}(x^i) \in \varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa)\,.$$

Hier ist $\varphi_{\kappa\iota}$ ein Homöomorphismus von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ein Atlas φ wird von *Klasse* C^k genannt, wenn alle Transformationen $\varphi_{\kappa\iota}$ stetig und k-fach differenzierbar sind.

Differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt *differenzierbar*, wenn sie einen maximalen Atlas φ der Klasse C^k besitzt.

Seien X, Y zwei Mannigfaltigkeiten mit Karten $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ und $(V_\kappa, \psi_\kappa)_{\kappa \in K}$. Dann kann man die *Produktmannigfaltigkeit* $X \times Y$ mit Karten $(U_\iota \times V_\kappa, \varphi_{\iota,\kappa})_{(\iota,\kappa)\in I\times K}$ konstruieren, wobei die Homöomorphismen $\varphi_{\iota,\kappa}$ definiert sind als

$$\varphi_{\iota,\kappa} : (x, y) \in U_\iota \times V_\kappa \mapsto (\varphi_\iota(x), \psi_\kappa(y)) \in \mathbb{R}^{n+m} .$$

Eine offene Untermannigfaltigkeit Y einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X ist eine offene Teilmenge von X, deren differenzierbare Struktur durch Einschränkung des Atlas von X auf Y folgt.

VEKTORFELDER

Wir betrachten nun differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wir lassen dabei das Wort differenzierbar im folgenden oft weg.

Differenzierbare Abbildung. Sei $f : X^n \to Y^m$ mit X^n, Y^m beides von der Klasse C^k. Seien (U_ι, φ_ι) und (V_κ, ψ_κ) Karten von X^n und Y^m mit $U_\iota \cap f^{-1}(V_\kappa) \neq \emptyset$. Die *Darstellung* von f bezüglich der gegebenen Karten ist

$$f_{\kappa\iota}(x^i) = \psi_\kappa \circ f \circ \varphi_\iota^{-1}(x^i) , \quad (x^i) \in \varphi_\iota(U_\iota \cap f^{-1}(V_\kappa)) .$$

Hier ist $f_{\kappa\iota}$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Seien nun $\varphi_{\iota\lambda}$ und $\psi_{\mu\kappa}$ Koordinatentransformationen von X^n bzw. Y^m. Wenn $x \in U_\iota \cap U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu \cap V_\kappa)$, dann haben wir

$$f_{\mu\lambda} = \psi_{\mu\kappa} \circ f_{\kappa\iota} \circ \varphi_{\iota\lambda} = \psi_\mu \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1} .$$

Die Abbildung f heißt *stetig differenzierbar von der Ordnung s am Punkt* $x \in X^n$, wenn für zwei Karten (U_ι, φ_ι), (V_κ, ψ_κ) mit $x \in U_\iota$ und $y = f(x) \in V_\kappa$, die Darstellung $f_{\kappa\iota}$ stetig differenzierbar von der Ordnung s am Punkt $x^i(x)$ ist. (Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten.)

Kurven. Ein *Kurve γ der Klasse C^r* ist eine Beispiel für eine differenzierbare Abbildung von $I \subset \mathbb{R}^1$ in X^n,

$$\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in X^n .$$

Diffeomorphismus. Ein *Diffeomorphismus* von X^n auf Y^m ist eine 1:1 Abbildung, die differenzierbar ist, und deren Inverses ebenfalls differenzierbar ist.

Tangentialvektor. Der Tangentialvektor der Kurve γ am Punkt p wird wie folgt definiert: Wir wählen eine Karte (U_ι, φ_ι) mit $p \in U_\iota$. Sei f differenzierbar in U_ι und sei $\gamma(t)$ so, dass $\gamma(t_0) = p$. Mit den Koordinatendarstellungen von f und γ konstruieren wir

$$\left.\frac{\partial f_\iota}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} .$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Wahl der Karte, und wir schreiben das als

$$Xf = \left.\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} f .$$

Dann heißt X der *Tangentialvektor* zu γ am Punkt p. Die $\partial/\partial x^i$ sind die Tangentialvektoren zu den Kurven, deren Koordinatendarstellungen gegeben sind durch $x^i = x_0^i + (t - t_0)$ und $x^j = \mathrm{const}$ für alle $j \neq i$.

Tangentialraum. Die Menge aller Tangentialvektoren zu Kurven durch p bilden den *Tangentialraum* $T_p(X^n)$ von X^n am Punkt p. Die disjunkte Vereinigung aller $T_p(X^n)$ heißt das *Tangentialbündel* von X^n:

$$T(X^n) = \bigcup_{p \in X^n} T_p(X^n) .$$

Zu jeder Karte (U_ι, φ_ι) mit $x \in U_\iota$ korrespondiert eine bijektive Abbildung $\varphi_{\iota\kappa} : T_x(X^n) \to \mathbb{R}^n$, die jedem Vektor $X \in T_x(X^n)$ eine Koordinatendarstellung $X_i \in \mathbb{R}^n$ zuweist. Das Tangentialbündel ist unser erstes Beispiel für ein Faserbündel.

Vektorfeld. Das Tangentialbündel $T(X^n)$ ist das erste Beispiel dessen, was wir ein *Faserbündel* nennen werden. Man kann $T(X^n)$ die Struktur einer differentierbaren Mannigfaltigkeit geben, die lokal eine Produktmannigfaltigkeit ist, indem wir lokal die Elemente als Paare (x, X) mit $x \in X^n$ und $X \in T_x(X^n)$ darstellen. Jedes Element von $T_x(X^n)$ kann zu jedem anderen Element durch eine lineare Transofrmation in Beziehung gesetzt werden, also durch ein Element von $GL(n, \mathbb{R})$, was hier die so genannte *Strukturgruppe* ist, die auf der Bündelmannigfaltigkeit operiert. Letztendlich existiert eine Projektion von $T(X^n)$ auf die Basismannigfaltigkeit X^n, die die *Faser* über x, nämlich $T_x(X^n)$, auf x abbildet.

Damit können wir auch sagen, was ein *Vektorfeld* ist: Dies ist eine Zuweisung eines Tangentialvektors $X_p \in T_p(X^n)$ für jeden Punkt $p \in X^n$.