ZUSAMMENHÄNGE AUF PRINZIPALFASERBÜNDELN

Ein Zusammenhang liefert eine Zerlegung des Tangentialraumes an jedem Punkt des Prinzipalfaserbündels. Jeder Tangentialvektor hat dann eindeutig bestimmte vertikale und horizontale Komponenten. Der Raum tangential zur Fase, also die vertikale Komponente des gesamten Tagentialraumes, ist isomoprh zur Lie-Algebra von G. Also gibt es zu jedem Tangetialvektor des Prinzipalfaserbündels ein eindeutig bestimmtes Element A der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zu einem Zusammenhang Γ gibt es eine *Zusammenhangs-1-Form* ω auf dem Prinzipalfaserbündel, die Werte in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ annimmt. Sei $X \in T_u(P)$, $u \in P$, dann ist $\omega(X)$ ist das Element $A \in \mathfrak{g}$, dessen Bild A^* unter der Aktion von G auf P genau die vertikale Komponente vX von X ist. Die Form ω hat die folgenden Eigenschaften:

[F1] $\omega(A^*) = A$ für alle $A \in \mathfrak{g}$,
[F2] $R_a^*\omega = (\mathrm{Ad}a^{-1})\omega$.

Die Bedingung F2 bedeutet, dass ω mit seiner Aktion auf $X = T_u(P)$ ein $A \in \mathfrak{g}$, auf das G gemäß der adjungierten Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Es gilt umgekehrt: Ist eine Zusammenhangs-1-Form mit den Eigenschaften F1 und F2 auf einem Prinzipalfaserbüdnel gegeben, dann garantiert dies die Existenz eines Zusammenhangs Γ. Die zugehörigen horizontalen Unterräume der Tangentialräume an u sind dann

$$hT_u(P) = \{X \in T_u(P) : \omega(X) = 0\}\,.$$

Lokale Form. In der Physik verwendet man meist die lokale Form der Zusammenhangs-1-Form. Sei $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ ein Diffeomorphismus. Dadurch wird ein lokaler Schnitt $\sigma(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e)$ definiert, wobei $x \in U_\alpha$ und e ist die Identität von G. Es sei θ die kanonische 1-Form auf G. Da alles auch für U_β gilt, haben wir für $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ die 1-Form

$$\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^*\theta$$

und die $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega\,.$$

Entwickelt man ω_α in eine Basis von $\mathfrak{g}$ und von U_α, erhält man die Koeffizienten des Zusammenhangs, wie man sie in der Physik kennt. Deren Transformationsgesetz folgt aus

$$\omega_\beta = \mathrm{ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta}\,.$$

Beispiel. Erarbeiten Sie dies für den Fall, dass die Strukturgruppe durch $GL(n, \mathbb{R})$ gegeben ist.

Assoziierte Bündel. Ein Zusammenhang auf $P(M, G)$ erlaubt es, auch den horizontalen Unterraum eines Tangentialraumes an einem Punkt eines assoziierten Bündels $E(M, G, P, F)$ zu bestimmen. Sei $(v, \xi) \in P \times F$, das mittels dieser Faktorisierung aus $w \in E$ projiziert wird. Sei ξ fest, so dass wir so eine Abbildung $P \to E$ erhalten. Das Bild von $hT_u(P)$ unter dieser Abbildung nennen wir den horizontalen Unterraum von $T_s(E)$, $hT_w(E)$. Dieser ist unabhängig von der Wahl von (v, ξ) in der Äquivalenzklasse.

Lift. Mit diesem Konzept des horizontalen Unterraums auf Prinzipalfaserbündeln können wir eine Kurve $\gamma = x_t$ in M auf eindeutige Weise auf P bzw. E *liften*. Der *Lift* von γ auf P, $\tau = u_t$, ist eine Kurve mit Projektion $\pi(u_t) = x_t$, die durch u_0 mit horizontalem Tangentialvektor geht. Ebenso ist der Lift von γ auf E definiert als $\tau^* = w_t$, wobei w_0 den Bedingungen $\pi_E(w_0) = x_0$ und $\pi_E(w_t) = x_t$ genügt. Gehören u_0 bzw. w_0 zu den Fasern $\pi^{-1}(x_0)$ bzw. $\pi_E^{-1}(x_0)$, so erhalten wir eine Abbildung dieser Fasern auf die Fasern über x_t, die *Paralleltranslation* genannt wird.

Kovariante Ableitung. Die *kovariante Ableitung* eines Schnittes φ eines Vektorbündels in die Richtung $\dot{x}_t$ ist gegeben durch

$$\nabla_{\dot{x}t}\varphi = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t)\right]\,.$$

Hierbei ist $\tau_t^{t+h} : \pi_E^{-1}(x_{t+h}) \to \pi_E^{-1}(x_t)$ ist der Paralleltransport von x_{t+h} zu x_t entlang von $\gamma = x_t$. Die kovariante Ableitung in die Richtung eines Vektors $X \in T_x(M)$ ist gegeben durch $\nabla_{\dot{x}_0}\varphi$ durch die Wahl einer Kurve, deren Tangentialvektor an der Stelle $x = x_0$ gerade X ist. Sei schließlich X ein Vektorfeld auf M. Dann ist

$$(\nabla_X\varphi)(x) = \nabla_{X_x}\varphi\,.$$

Formen. Wir wollen Formen auf M mit Werten in einem Vektorraum V betrachten, den wir als Standardfaser eines Bündels $E(P, M, G, V)$ assoziiert zu $P(M, G)$ auffassen. Hier wirkt G auf V mittels der Darstellung ρ.

Wir nennen φ eine *Pseudotensorform* auf P vom Typ (ρ, V), wenn sie V-wertig ist und $R_a^*\varphi = \rho(a^{-1})\dot{\varphi}$ für alle $a \in G$ gilt. Sie heißt *Tensorform*, wenn fernen $\varphi(X_1, \ldots, X_r) = 0$ gilt, wenn wenigstens ein Tangentialvektor $X_i \in T_u(P)$ vertikal ist.

Einer Tensorform $\hat{\Lambda}$ auf P mit Werten in V kann man eine Form Λ auf M mit Werten in E zuweisen:

$$\hat{\Lambda}_u(X_1, \ldots, X_r) = u^{-1}\Lambda_{\pi(u)}(\mathrm{d}\pi X_1, \ldots, \mathrm{d}\pi X_r)\,.$$

Hier ist $u \in P$, $\pi(u) \in M$ und $X_1, \ldots, X_r \in T_u(P)$. Man beachte: $\Lambda_{\pi(u)}(\mathrm{d}\pi X_1, \ldots, \mathrm{d}\pi X_r)$ ist ein Element von E in $\pi_E^{-1}(x)$, $x = \pi(u)$. Diese Äquivalenzklasse hat einen Repräsentanten (u, ξ) in $P \times V$. Hält man u fest, bestimmt dies eine Abbildung von V nach E. Bei festem u wird ein $\xi \in V$ jedem $w \in E$ zugewiesen. So kann man u als eine Abbildung auffassen, so dass für jede Tensorform über P eine Form über M mit Werten in E mittels

$$\Lambda_x(t_1, \ldots, t_r) = u\hat{\Lambda}(X_1, \ldots, X_r)$$

erhalten werden kann. Hier ist $x = \pi(u)$, $t_1, \ldots, t_r \in T_x(M)$, und $X_1, \ldots, X_r \in T_u(P)$ mit $\mathrm{d}\pi X_i = t_i$.

Lokale Darstellung. Sei σ_ι der lokale Schnitt auf P, $\sigma_\iota(x) = \psi^{-1}(x, e)$, der zum Diffeomorphismus $\psi_\iota : \pi^{-1}(U_\iota) \to U_\iota \times G$ assoziiert ist. Dann ist die lokale Form von Λ gegeben durch

$$\Lambda_\iota = \sigma_\iota^*\hat{\Lambda}\,.$$

Äußere kovariante Ableitung. Sei $\hat{\Lambda}$ eine Pseudotensor-q-Form auf P. Dann heißt $D\hat{\Lambda} = (\mathrm{d}\hat{\Lambda})h$ die äußere kovariante Ableitung von $\hat{\Lambda}$. Hierbei bedeute das rechtsstehende h, dass wir nur die horizontalen Komponenten der q Vektoren nehmen, auf denen $\mathrm{d}\hat{\Lambda}$ wirkt.

Es ist $\mathrm{d}\hat{\Lambda}$ ein $(q+1)$-Form. Die äußere kovariante Ableitung der Zusammenhangs-1-Form ist die Krümmungsform $\Omega = D\omega$. Ohne Zusammenhang Γ auf P könnte die Fomr $\mathrm{d}\hat{\Lambda}$ nicht konstruiert werden.

Einfache Formeln. Sei $\hat{\Lambda}$ eine Tensor-p-Form auf $P(M, G)$ mit Werten in V und $\rho_* : \mathfrak{g} \to GL(V)$ der durch die Darstellung ρ von G in $GL(V)$ induzierte Lie-Algebra-Homomorphismus. Sei ω die Zusammenhangs-1-Form. Dann ist

$$D\hat{\Lambda} = \mathrm{d}\hat{\Lambda} + \rho_*(\omega) \wedge \hat{\Lambda}\,.$$