Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe bis 30.01.2012

SPIELREGELN ZUR COMPUTERÜBUNG

Die Bearbeitung der Übungsaufgaben soll in Zweier- oder Dreiergruppen erfolgen. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Bei der Abgabe ist es am Rechner vorzuführen und zu erläutern.

Aufgabenbetreuung findet zu folgenden Zeiten statt: Jeweils Dienstags und Donnerstags 14 bis 15 Uhr im CIP-Pool F411. Versuchen Sie unbedingt, erst selbst eine Lösung zu finden und dafür die sehr umfangreiche Dokumentation zu *Mathematica* zu konsultieren. Wenn Sie von dem Betreuungsangebot Gebrauch machen, ist es vorteilhaft, mit klar formulierten und gezielten Fragen zu kommen.

Die Abgabe Ihrer Lösungen findet innerhalb dieser Betreuungszeiten oder nach Vereinbarung statt. Dabei müssen jeweils alle Mitglieder der Arbeitsgruppe anwesend sein, jeder muss in der Lage sein, die Lösung zu erklären.

[C3] *Bewegung im Kraftfeld* **[6 Punkte]**

Gegeben seien drei Parameterkurven im dreidimensionalen Raum,

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sin(\pi t) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos(\pi t)) \end{pmatrix},$$

welche für $t \in [0,1]$ von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ führen. Außerdem sei ein Vektorfeld wie folgt gegeben:

$$\vec{k}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -2xy + z^3 \\ -1 - x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie mit Hilfe von `ParametricPlot3D` die Wege $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ dar.

(b) Berechnen Sie die Arbeit im Kraftfeld $\vec{k}$ als Wegintegral $\int_0^1 \vec{k}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \vec{k} \cdot \dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}t$ für $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$. Welche Beobachtung machen Sie?

(c) Das Ergebnis von (b) legt eine besondere Eigenschaft des Kraftfeldes $\vec{k}$ nahe. Insbesondere ist dieses Kraftfeld ein Gradientenfeld mit zugehörigem Potential. Definieren Sie die Differentation `rot` in *Mathematica* selbstständig als eine Funktion (also *ohne* den eingebauten Operator `curl` zu verwenden!!) und zeigen Sie damit $\mathrm{rot}\,\vec{k} = 0$.

(d) Berechnen Sie das Potential $V(\vec{r})$, indem Sie die Aussage $\vec{k}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}V(\vec{r})$ als drei Differentialgleichungen schreiben, die Sie mit Hilfe von `DSolve` lösen lassen können.

[C4] *Jacobimatrix* **[6 Punkte]**

Betrachten Sie den Koordinatenwechsel aus [P22].

(a) Konstruieren Sie in *Mathematica* eine 3×3 Matrix M, deren Spalten gerade $\partial_i r$, $\partial_i \theta$ und $\partial_i \varphi$ enthalten, wobei ∂_i, $i = 1,2,3$, die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten x, y, z sind.

(b) Konstruieren Sie in *Mathematica* eine 3×3 Matrix N, deren Zeilen gerade $\partial_r x_i$. $\partial_\theta x_i$ und $\partial_\varphi x_i$ enthalten, mit x_i, $i = 1,2,3$, die kartesischen Koordinaten x, y, z.

(c) Substituieren Sie entweder in M für x, y, z deren Ausdrücke in r, θ, φ, oder in N für r, θ, φ deren Ausdrücke in x, y, z. Versuchen Sie, mit Hilfe von *Mathematica* die Ergebnisse so weit wie möglich zu vereinfachen (probieren Sie z.B. `FullSimplify` und studieren Sie die Online-Dokumentation.)

(d) Berechnen Sie MN und zeigem Sie, dass dies die Einheitsmatrix ergibt.