Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 25.11.2011 vor der Plenarübung

MATRIZEN, EIGENWERTE UND DARSTELLUNGEN

Mit diesen Übungen machen Sie sich mit weiteren grundlegenden Eigenschaften von linearen Abbildungen vertraut.

[H19] *Trägheitstensor* **[$2 + 4 = 6$ Punkte]**

Ein starrer Körper rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Hier gibt der Vektor mit seiner Richtung die Drehachse, mit seinem Betrag den Betrag der Winkelgeschwindigkeit um diese Achse an. Die Rotationsenergie des starren Körpers sei folgendermaßen gegeben: $E = \frac{I_0}{2}(4\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + 5\omega_3^2 - 2\omega_1\omega_3 - 2\omega_2\omega_3) =: \frac{1}{2}\omega_i\Theta^{ij}\omega_j$, wobei I_0 eine Konstante ist mit der Maßeinheit $\mathrm{kg\,m}^2$.

(a) Geben Sie die Matrix Θ an, sie wird *Trägheitstensor* genannt.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von Θ. Diese heißen *Trägheitsmomente* und *Hauptträgheitsachsen.*

[H20] *Trägheitstensor II* **[$1 + 4 + 1 = 6$ Punkte]**

Die Komponenten Θ^{ij} des Trägheitstensors von n Massepunkten m_α an Orten $\vec{r}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, sind durch

$$\Theta^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\delta^{ij}(\vec{r}_\alpha)^2 - r_\alpha^i r_\alpha^j)$$

definiert. Dabei sind r_α^i die Komponenten des Ortsvektors zum Massepunkt α in einer Orthonormalbasis.

(a) Zeigen Sie $\Theta^{ij} = \Theta^{ji}$.

(b) Berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors für vier gleiche Massenpunkte, die sich an den Orten $\vec{r}_1 = r(0, 0, 1)$, $\vec{r}_2 = r(1, 0, 0)$, $\vec{r}_3 = r(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und $\vec{r}_4 = r(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ befinden.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{r}_\alpha$$

der Massenanordnung aus (b). Hierbei ist $M = \sum_\alpha m_\alpha$ die Gesamtmasse.

[H21*] *(Anti-)Symmetrie* **[$1^* + 2^* = 3^*$ Extrapunkte]**

Ein antisymmetrischer Tensor $A_{ij} = -A_{ji}$ werde mit einem symmetrischen Tensor $S^{ij} = S^{ji}$ kontrahiert, d.h., es wird die Doppelsumme $S^{ij}A_{ij}$ gebildet.

(a) Zeigen Sie, dass diese Summe verschwindet.

(b) Folgern Sie hieraus, dass das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!