Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr


## KREUZPRODUKT & DREHUNGEN

Das Kreuzprodukt tritt in vielen physikalischen Größen auf, die mit Drehungen zu tun haben. Daher wollen wir hier Drehungen studieren.

**[P8]** *Drehungen*
Eine Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ ist eindeutig durch Angabe einer Drehachse $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, und eines Drehwinkels $\alpha$ bestimmt. Ein beliebiger Vektor $\vec{u}$ lässt sich bezüglich $\vec{n}$ immer schreiben als $\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$, wobei $\vec{u}_{\|} = \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{u})$ und $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\|}$ ist. Damit ist die Drehung

$$D_{\alpha\vec{n}}\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \cos(\alpha)\vec{u}_{\perp} + \sin(\alpha)(\vec{n} \times \vec{u})\,.$$

(a) Berechnen Sie $D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, für die Basisvektoren der Standardbasis.

(b) Zeigen Sie, dass $\varepsilon(D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_1, D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_2, D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_3) = \varepsilon(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$ ist. *Hinweis*: Beachten Sie, dass Sie $D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_i = (1 - \cos(\alpha))\vec{e}_{i,\|} + \cos(\alpha)\vec{e}_i + \sin(\alpha)(\vec{n} \times \vec{e}_i)$ schreiben können. Überlegen Sie, welche der 27 Terme in $\varepsilon(D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_1, D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_2, D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_3)$ daher von vorne herein verschwinden.

**[P9]** *Pauli-Matrizen*
WIr betrachten die folgenden drei Matrizen, die in der Physik in sehr große Rolle spielen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Im folgenden betrachten Sie “i” einfach als eine algebraische Größe, die die interessante Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ hat.

(a) Berechnen Sie alle neun Matrixprodukte $\sigma_i\sigma_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Bilden Sie daraus die drei speziellen Kombinationen $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$, $i < j$.

(c) Überzeugen Sie sich, dass in der Tat $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ gilt.

(d) Überzeugen Sie sich, dass außerdem $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.