

MATRIZEN

Mit Matrizen werden lineare Abbildungen von Vektorräumen beschrieben. Besonders häufig treten in der Physik lineare Abbildungen von Vektorräumen auf sich selbst auf. Damit können zum Beispiel Wechsel von Koordinatensystemen beschrieben werden, die auftreten, wenn man von einem ruhenden Bezugssystem in ein anderes, z.B. bewegtes, Bezugssystem wechselt.

[P10] Lorentz-Boosts

Wir betrachten eine 1 + 1-dimensionale Raumzeit. Ereignisse werden also durch Angaben $x = (x^0, x^1)$ charakterisiert. Diese Ereignisse fassen wir als Elemente eines zwei-dimensionalen Vektorraumes auf. Es ist $x^0 = t$ die Zeit, und $x^1 = x$ die Ortskoordinate, die verwirrenderweise auch x genannt wird. Wir betrachten nun folgende lineare Abbildungen dieses zwei-dimensionalen Vektorraumes auf sich:

$$L(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Matrizen eine Gruppe formen, dass also das Produkt $L(u)L(v) = L(w)$ für eine geeignete Funktion $w(u, v)$ ist.

- Wir definieren $\eta(x, x) = t^2 - x^2$. Zeigen Sie, dass $\eta(L(v)x, L(v)x) = \eta(x, x)$ ist. Berechnen Sie die Determinante $\det L(v)$.
- Multiplizieren Sie $L(u)L(v)$ und versuchen Sie, das Ergebnis direkt in der Form $L(w)$ zu schreiben. Nennen Sie dazu das Matrix-Element $(L(w))_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ und lösen Sie nach w auf. Überzeugen Sie sich, dass $w \neq u + v$ ist.
- Wir führen folgende Notation ein:

$$\cosh(\sigma(v)) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \sinh(\sigma(v)) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma(v) = \ln \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Drücken Sie $L(v)$ in dieser Notation aus. Zeigen Sie mit (a), dass $\cosh^2(\sigma) - \sinh^2(\sigma) = 1$ ist. Zeigen Sie weiter, dass für alle reellen v , $|v| < 1$, gilt, dass $\cosh(\sigma(v)) \geq 1$. Wann ist $\cosh(\sigma(v)) = 1$? *Anmerkung:* Der Zusammenhang $\sigma(v)$ wird nicht explizit benötigt. Die Größe σ wird *Schnelligkeit* genannt.

- Es gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sinh(\sigma + \zeta) &= \sinh(\sigma) \cosh(\zeta) + \sinh(\zeta) \cosh(\sigma), \\ \cosh(\sigma + \zeta) &= \cosh(\sigma) \cosh(\zeta) + \sinh(\sigma) \sinh(\zeta). \end{aligned}$$

Drücken Sie damit das Produkt $L(u)L(v)$ in möglichst einfacher Form aus.

- Betrachten Sie einen Ruhenden Beobachter, gegeben durch die Weltlinie $f : t \mapsto (t, 0)$. Wie bewegt sich der Beobachter nach einem Boost $L(v)$?
- Betrachten Sie einen Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $x(t)/t = 1$ bewegt. Wie lautet die Weltlinie für diesen Punkt? Wie bewegt sich dieser Punkt nach einem Boost mit $L(v)$?
- In (b) haben Sie $w(u, v)$ bestimmt. In (d) haben Sie gesehen, dass $\sigma(w) = \sigma(u) + \sigma(v)$ ist. Vergleichen Sie zum Abschluss nun die Funktion $w(u, v)$ mit $\tan(\alpha + \beta)$.

BITTE WENDEN

[P11] *Übungen zur Indexnotation*

Was besagen die folgenden Gleichungen

$$(M^\top)_j^i = M_j^i,$$

$$(ML)^i_j = M_k^i L^k_j,$$

$$(a \times b)^i = \epsilon g^{ij} \epsilon_{jkl} a^k b^l,$$

in einer volumennormierten Orthonormalbasis explizit für $(M^\top)_1^1$, $(M^\top)_1^2$, $(ML)_2^1$, $(a \times b)^1$, $(a \times b)^2$ und $(a \times b)^3$?