INTERGRATION

Integrieren gehört neben dem Differenzieren zu einer der wichtigsten Techniken, die der Physiker auf dem Gebiet der Analysis benötigt. Deshalb spielt in diesen Aufgaben das Integrieren immer eine wichtige Rolle.

[H25+C4] *Mal wieder der harmonische Oszillator* **$[(2+2)+(3)=4+3$ Punkte$]$**

Ein-dimensionale Probleme lassen sich im Prinzip allein mit Hilfe des Energiesatzes lösen. Dies soll hier am Beispiel des harmonischen Oszillators nachvollzogen werden.

(a) Nutzen Sie den Energiesatz, um die Zeit $t(x)-t(x_0)$ explizit anzugeben, die der Oszillator braucht, um von der Anfangsauslenkung x_0 die Auslenkung x zu erreichen. Das Integral ist dabei von Hand, also analytisch, auszurechnen. Welche Periode ergibt sich für die Schwingung?

(b) Invertieren Sie dies um die Auslenkung $x(t)$ als Funktion der Zeit t anzugeben. Vergleichen Sie mit der bekannten Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator.

(c) *Computerübung*: Betrachten Sie einen anharmonsichen Oszillator mit Potential $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2-\frac{1}{4}m\alpha x^4$. Berechnen Sie mit MATHEMATICA numerisch die Umkehrpunkte $\underline{x}$ und $\overline{x}$ für dieses Potential, und damit die Periode T mit Hilfe des Energiesatzes (numerische Integration mit Hilfe von MATHEMATICA). Vergleichen Sie die Abhängigkeit der Periode T von der Energie E mit dem Fall des harmonischen Oszillators.

[H26] *Ein-dimensionale Bewegung* **$[1+2+1=4$ Punkte$]$**

Experimentell wurde für $t>0$ die ein-dimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m verfolgt, es ergab sich $x(t)=b\arctan(\omega t)$ mit b,ω positive, bekannte, Konstanten.

(a) Welche Kraft $F(t)$ hat diese Bewegung verursacht?

(b) Welches Potential $V(x)$ hat diese Kraft?

(c) Das Potential erhält man auch direkt aus dem Energiesatz, stimmen beide Ergebnisse überein?

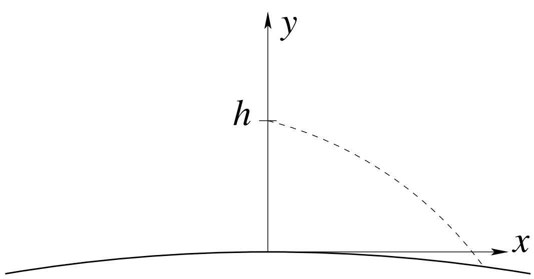
[H27] *Arbeit* **$[2+2=4$ Punkte$]$**

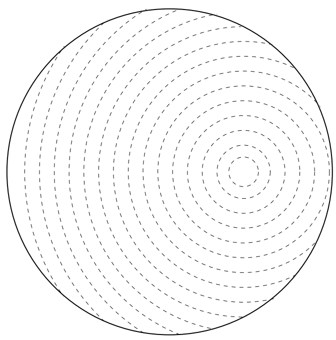
Ermitteln Sie die Arbeit $W=\int_{\underline{t}}^{\bar{t}}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t))$, die beim Verschieben eines Teilchens im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ längs eines Weges $\Gamma: t\mapsto\vec{r}(t)$ von $\vec{r}(\underline{t})$ zu $\vec{r}(\bar{t})$ geleistet wird:

(a) Es sei $\vec{F}(\vec{r})=\vec{A}\times\vec{r}$, $\vec{A}=A\vec{e}_z$, und der Weg Γ ein Halbkreis im Gegenzeigersinn um den Ursprung in einer Ebene senkrecht zu $\vec{A}$.

(b) Es sei $\vec{F}(\vec{r})=-\kappa(x^3+2xy^2,y^3+2yx^2,0)$ und Γ der stückweise gerade Weg, der von $(-a,-b,0)$ über $(+a,-b,0)$ zu $(+a,+b,c)$ führt. *Hinweis*: Wer zunächst prüft, ob es zu dieser Kraft ein Potential gibt, kann sich das Leben hier sehr viel einfacher machen ...

Skizzen für die Aufgaben **[H29*]** und **[H32*]**.





BITTE WENDEN

Wie versprochen, gibt es eine Reihe von Übungen mit 25 Sonderpunkten, mit denen Sie Ihr Punktekonto – falls nötig – über Weihnachten aufbessern können. Aber natürlich dürfen Sie diese Aufgaben auch dann rechnen, wenn Ihr Punktekonto schon gut gefüllt ist ;)

[H28*] *Zusatzaufgabe: Mehr Integrale* **[$1^* + 1^* + 1^* + 1^* + 1^* = 5^*$ Punkte]**

Die folgenden Integrale können mit Techniken wie partielle Integration, Integration durch Substitution usw. ausgerechnet werden. Ihre Rechnung muss alle Zwischenschritte enthalten und mit Erklärungen versehen sein, was genau Sie getan haben.

$$J_1 = \int_0^x \mathrm{d}y\, b\frac{2ay+y^2}{(a+y)^2}\,, \qquad J_2 = \int_0^c \mathrm{d}x\,\frac{x^2}{a+x}\,,$$
$$J_3 = \int_1^x \mathrm{d}y\, y^a \ln y\,, \qquad J_4 = 2\int_0^\infty \mathrm{d}y\, y^{2n+1}\mathrm{e}^{-y^2}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,,$$
$$J_5 = \int \mathrm{d}x\,\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} \quad \text{(unbestimmtes Integral)}\,.$$

[H29*] *Zusatzaufgabe: Die Lüge mit der Wurfparabel* **[$1^* + 1^* + 1^* + 1^* + 1^* = 5^*$ Punkte]**

Die Bahnkurve eines Steines, der in der Höhe h (damit ist gemeint $x(0) = 0$, $y(0) = h \ll R$) horizontal geworfen wird (also $\dot{x}(0) = v_0 \ll R\sqrt{g/h}$, $\dot{y}(0) = 0$), ist keine Wurfparabel, auch im Vakuum nicht. Genau genommen ist die Bahnkurve ein Stück einer Planetenbahn. Wir wollen uns zumindest die erste Korrektur zur Wurfparabel hier klar machen.

(a) Schreiben Sie das Potential als Reihe bis einschließlich zur Ordnung $1/R$, vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/R^2$. *Hinweis*: $g := \gamma M/R^2$ eiführen und dann die *verbleibenden* R-Potenzen bis $1/R$ mitnehmen.
(b) Berechnen Sie aus dieser Näherung des Potentials die Kraft.
(c) Lösen Sie mit dieser Kraft die Newtonsche Bewegungsgleichung. *Hinweis*: Konsequenterweise sind auch in der Lösung $x(t)$, $y(t)$ alle Terme der Ordnung $1/R^2$ zu vernachlässigen.
(d) Eliminieren Sie t aus der Bahnkurve um eine Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ zu erhalten.
(e) Veranschaulichen Sie in einer Skizze qualitativ die Korrektur zur Parabel und deuten Sie das Ergebnis.

[H30*] *Zusatzaufgabe: Hauptachsentransformation* **[6^* Punkte]**

Im Kraftfeld $F(\vec{r}) = -\kappa H\vec{r}$ mit

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

durchläuft eine Masse m den Punkt $\vec{r}(0) = \frac{2}{3}a(1,2,2)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = \frac{2}{3}a\omega(-2,2,-1)$, Hierbei ist $\omega = \sqrt{\kappa/m}$. Berechnen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$. *Hinweis*: Es ist nützlich, zuerst einmal eine Hauptachsentransformation zu H vollständig durchzuführen.

[H31*] *Zusatzaufgabe: Schwingungsperiode* **[$2^* + 2^* = 4^*$ Punkte]**

Bestimmen Sie die Schwingungsperiode T in folgenden Situationen:

(a) Eine Punktmasse m mit Anfangsbedingungen $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ im Potential $V(x) = m\alpha\ln(x^2)$.
(b) Ein mathematisches Pendel der Masse m und Länge ℓ, das horizontal, d.h., bei $\varphi(0) = \pi/2$, losgelassen wird. *Hinweis*: Sie dürfen $\int_0^1 \mathrm{d}u \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} = \mu$ als eine bekannte mathematische Konstante annehmen, die Sie nicht weiter zu berechnen brauchen.

[H32*] *Zusatzaufgabe: Mehrdimensionale Integration* **[5^* Punkte]**

Eine kreisrunde Herdplatte mit Radius R, zentriert im Ursprung, sei inhomogen aufgeheizt. Die pro Zeit und Fläche abgestrahlte Energie (die Intensität) möge quadratisch mit dem Abstand ρ vom Punkt $\vec{r}_0 = (a,0,0)$ abnehmen: $I(\vec{r}) = I_0(1 - b\rho^2)$. Wieviel Energie pro Zeit (Leistung P) verliert die Platte durch Strahlung? Schreiben Sie dazu das entsprechende Mehrfachintegral sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten auf. Entscheiden Sie sich dann für die vermutlich einfachere Variante und führen das Integral aus.

HINWEIS

Bitte geben Sie immer auf Ihren abgegebenen Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!