NACHKLAUSUR :: AUFGABEN

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

[K1] *Kraftfeld* **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Betrachten Sie *in zwei Dimensionen* das Potential $V(\vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})/r^3$, wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist.

(a) Geben Sie das zugehörige Kraftfeld an.
(b) Geben Sie die Ortsvektoren $\vec{r}$ an, für die die Kraft senkrecht auf ihnen steht, also $\vec{F} \perp \vec{r}$ ist.
(c) Wie sehen die Äquipotentiallinien aus? Fertigen Sie hierfür eine Skizze mit $\vec{a} = \vec{e}_2$ an.

[K2] *Hauptachsen* **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Ein Schlitten der Masse m gleite mit der Geschwindigkeit $\vec{v} \doteq \binom{u}{w}$ auf einer Fläche mit anisotroper Reibungskraft

$$\vec{F} \doteq -m\alpha \begin{pmatrix} 2u + 2w \\ 2u + 5w \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie Hauptachsen der Fläche und fertigen Sie eine Skizze an. *Hinweis*: zweidimensionales Problem!
(b) Geben Sie die Drehung D an, unter der die Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ eine einfachere (welche?) Gestalt annimmt.
(c) Bestimmen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit $\underline{v}(0) = \binom{0}{v_0}$ die Lösung der Bewegungsgleichung $\underline{v}'(t) = \binom{u'(t)}{w'(t)}$ im Hauptachsensystem.

[K3] *Arbeit* **[1 + 2 + 1 = 4 Punkte]**

Eine Rakete der Masse m fliege vom Ursprung aus entlang der positiven x-Achse nach ∞.

(a) Parametrisieren Sie den Weg $\vec{r}(s)$ so einfach wie möglich. *Hinweis*: zweidimensionales Problem!
(b) *Gegen* die Anziehungskraft eines Sterns der Masse M bei $\vec{r}_0 \doteq \binom{0}{a}$ muss Arbeit A verrichtet werden. Berechnen Sie explizit das Kurvenintegral für A. *Hinweis*: $\partial_s \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \ldots$
(c) Geben Sie das Potential $V(\vec{r})$ an. Überprüfen Sie, dass $A = V(\infty, 0) - V(0, 0)$ ist.

[K4] *Differentialgleichung* **[2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte]**

Die Anzahl $N(t)$ von Kernen eines radioaktiven Elementes hängt von der Zerfallsrate τ^{-1} und der Produktionsrate α in folgender Weise ab: $\tau\dot{N}(t) = -N(t) + \tau\alpha t$ mit $N(0) = 0$.

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung: allgemeine Lösung des homogenen Problems bestimmen, spezielle Lösung des inhomogenen Problems mit linearem Ansatz finden, Anfangsbedingung nutzen.
(b) Mit welcher Potenz von t *beginnt* N zu wachsen?
(c) Wie verhält sich N für große Zeiten $t \gg \tau$?
(d) Erfüllt Ihre Lösung die Erwartung für stabile Kerne ($\tau \to \infty$)?

[K5] *Gravitation* **[2 + 2 + 1 = 5 Punkte]**

Zwei (punktförmige) gleiche Sterne, Masse jeweils M, bilden ein Doppelsternsystem. Im Schwerpunktsystem liegen die Sterne fest bei $(0, 0, -a)$ und $(0, 0, +a)$ auf der z-Achse.

(a) Geben Sie das Gravitationspotential $V(\vec{r})$ an. *Hinweis*: Superposition.
(b) Mit welcher Kreisfrequenz ω führt eine Raumsonde der Masse m auf der x-Achse kleine harmonische Schwingungen aus? *Hinweis*: $\ddot{x} = -\omega^2 x + \mathcal{O}(x^2)$.
(c) Welche Mindestgeschwindigkeit v_∞ müsste sie am Ursprung haben, um das System für immer verlassen zu können? *Hinweis*: Energiesatz.

[K6] *Indexnotation* **[3 Punkte]**

Gegeben seien drei antisymmetrische Matrizen A, B und C mit Elementen $A_{ij} = \varepsilon_{ijl} a_l$, $B_{jk} = \varepsilon_{jkm} b_m$ und $C_{ki} = \varepsilon_{kin} c_n$. Drücken Sie den Skalar $\mathrm{Sp}(ABC)$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

[K7] *Bahnkuve* **[4 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich auf der Bahnkurve $\vec{r}(t) \doteq \begin{pmatrix} R\sin(\omega t) + v_0 t \\ \gamma t^2 \\ -R\cos(\omega t) \end{pmatrix}$. Es ist bekannt, dass die Bewegung in räumlich und zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stattfindet. Die Kraft ist auf das Teilchen ist dann $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Bestimmen Sie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Sind alle Komponenten der Felder eindeutig festgelegt?

[K8] *Fluss durch eine Oberfläche* **[2 + 1 = 3 Punkte]**

Ein unendlich langer geladener Draht entlang der z-Achse erzeugt ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$ in Zylinderkoordinaten, also $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\vec{e}_\rho \doteq \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Betrachten Sie ein Rotationsparaboloid der Höhe H, d.h. $-H \le z = h(x, y) = -\alpha(x^2 + y^2) \le 0$. Geben Sie das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ an.
(b) Berechnen Sie den Fluss $\Phi = \int_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$ durch das Rotationsparaboloid.