Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 13.01.2015 vor der Vorlesung

PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir üben den Umgang mit partiellen Ableitungen

[H31] *Symmetrie und partielle Ableitungen* **[3 + 2 + 1 + 4 = 10 Punkte]**
Ein Potential $V(x) = \frac{1}{2}\kappa_{ij}x^i x^j$ hänge quadratisch von den Variablen $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ab.

(a) Zeigen Sie, dass man die Koeffizienten κ_{ij} aus symmetrischen und antisymmetrischen Anteilen zusammensetzen kann, d.h.

$$\kappa_{ij} = s_{ij} + a_{ij} \quad \text{mit} \quad s_{ij} = s_{ji}\,, \quad a_{ij} = -a_{ji}\,,$$

indem Sie s_{ij} und a_{ij} durch κ_{ij} ausdrücken.

(b) Warum trägt nur der symmetrische Anteil von κ_{ij} zum Potential bei, $V(x) = \frac{1}{2}s_{ij}x^i x^j$?

(c) Welchen Wert haben die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x^k}{\partial x^l}$, $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

(d) Berechnen Sie hiermit und mit der Produktregel die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^k}V$ und $\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}V$ von $V(x) = \frac{1}{2}\kappa_{ij}x^i x^j$.

[H32] *Kugelkoordinaten* **[4 + 4 + 2 + 2 = 12 Punkte]**
Erinnern Sie sich an die Kugelkoordinaten aus Aufgabe [P27]. Es sei $\vec{r}(t)$ in Kugelkoordinaten gegeben, also

$$\vec{r}(t) = r(t)\begin{pmatrix} \sin\theta(t)\,\cos\varphi(t) \\ \sin\theta(t)\,\sin\varphi(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t)$ in Kugelkoordinaten an.

(b) Verwenden Sie Ihr Resultat aus (a), um die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}(t)^2$ in Kugelkoordinaten anzugeben.

(c) Nehmen Sie an, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet. Legen Sie die z-Achse für die Kugelkoordinaten so, dass sie senkrecht zur Ebene liegt. Wie vereinfacht sich unter dieser Annahme die kinetische Energie?

(d) Geben Sie den Drehimpuls für eine ebene Bewegung an, wobei Sie die z-Achse wie in (c) wählen.

[H33] *Bewegungsgleichungen* **[2 + 2 + 4 = 8 Punkte]**
Ein Teilchen der Masse m bewege sich in der x-y-Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\omega^2\begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es Lösungen der Bewegungsgleichungen von der Form $x^i(t) = A^i\,\cos(\Omega^i t + \varphi^i)$ gibt, wobei $x^1 = x$, $x^2 = y$. Bestimmen Sie die Ω^i, $i = 1, 2$.

(b) Überprüfen Sie für die allgemeine Lösung den Energieerhaltungssatz.

(c) Geben Sie die Anfangswerte so an, dass sich das Teilchen
(α) auf einem Parabelbogen,
(β) auf einer achtförmigen Bahn,
bewegt. *Hinweis*: Benutzen Sie gegebenenfalls MATHEMATICA, um durch etwas Probieren die gesuchten Anfangswerte zu finden. Diese sind nicht eindeutig, die Angabe jeweils einer Lösung genügt.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!