Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

VEKTOREN, MATRIZEN UND DREHUNGEN

Neben weiteren Rechnungen zur Indexnotation beschäftigen Sie sich mit Drehungen und den zugehörigen Matrizen.

[H12] *Die „bac-cab" Regel* **[$5 + 4 + 1 = 10$ Punkte]**

(a) Berechnen Sie $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ mit Hilfe der Indexnotation, in dem Sie Kreuzprodukte durch das ε-Symbol ausdrücken.

(b) Berechnen Sie die Komponenten $\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right)^i$, $i = 1, 2, 3$, direkt, in dem Sie für die Komponenten von Kreuzprodukten die konkreten Ausdrücke einsetzen. Zum Beispiel wäre $(\vec{b} \times \vec{c})^1 = b^2c^3 - b^3c^2$.

(c) Welche Rechnung fiel Ihnen leichter, und warum?

[H13] *Generatoren von Drehungen* **[$5 + 5 + 5^* = 10 + 5^*$ Punkte]**

Es bezeiche $\delta_i = \vec{e}_i \times$ die Abbildung, die einen Vektor $\vec{u}$ auf $\delta_i \vec{u} = \vec{e}_i \times \vec{u}$ abbildet. Es ist dann $\delta_i \vec{u}$ die infinitesimale Änderung, die $\vec{u}$ bei einer Drehung um die $\vec{e}_i$-Achse erfährt.

(a) Geben Sie die Matrizen δ_i an.

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\delta_i, \delta_j] = \delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i$. Können Sie diese durch Matrizen vom Typ der δ_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, ausdrücken?

(c*) *Zusatzaufgabe*: Betrachten Sie eine allgemeine Drehung wie in [P18]. Differenzieren Sie nach α, und setzen danach $\alpha = 0$, bilden Sie also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} D_{\alpha\vec{n}}\bigg|_{\alpha=0} .$$

Können Sie einen Zusammenhang zu den Matrizen δ_i herstellen?
Hinweis: Für sehr kleine Drehwinkel ist die Drehung näherungsweise gegeben durch

$$D_{\alpha\vec{n}} \approx \mathbb{1} + \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} D_{\alpha\vec{n}}\bigg|_{\alpha=0} .$$

[H14] *Körperfeste Drehungen* **[$2 + 3 + 3 + 2 = 10$ Punkte]**

Für ein astronomisches Experiment wurde ein Detektor zur Bestimmung der Richtungen, aus welcher Gammastrahlungsquellen zu sehen sind, mit einer Rakete in den Weltraum geschossen. Am Zielort wird die Richtung $\vec{f}$ für die Gammaquelle im Zentrum unserer Galaxis bestimmt. Das Resultat ist, bezogen auf das satelliteneigene Koordinatensystem, $\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Kurz darauf wird der Satellit durch einige Manöver so gedreht, dass seine Antennen für den Kontakt zur Erde optimal ausgerichtet sind:
Der Detektor wird nacheinander (1) um $\pi/2$ um die z-Achse gedreht, dann (2) um α mit $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ um die neue x-Achse gekippt. Wir ordnen den Drehungen (j) Matrizen $D^{(j)}$ zu.

(a) Geben Sie die Matrizen $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ dieser *körperfesten* Drehungen an.

(b) Welche Matrix R vermittelt von der Start- zur Endlage des Satelliten? Überlegen Sie dabei, wie die Drehungen $D^{(j)}$ auf die Lage des Satelliten wirken.

(c) Bestimmen Sie aus der Matrix R einen Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$, der unter der Gesamtdrehung nicht geändert wird (das ist die Drehachse), sowie $\cos\phi$ und $\sin\phi$ des zugehörigen Winkels ϕ der Gesamtdrehung.

(d) Welche Richtungen $\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)}$ ergibt die Ortung nach den einzelnen Drehungen? Überlegen Sie, dass sich die Komponenten von $\vec{f}$ unter den körperfesten Drehungen so transformieren, wie bei raumfesten Drehungen mit dem negativen Drehwinkel.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!