Präsenzübung I zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2014/15
Prof. Dr. Norbert Dragon
14.-15.10.2014 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

RECHNEN MIT VEKTOREN

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind einfache Rechnungen mit Vektoren. Hierbei ist ein Vektor $\vec{a} = \vec{e}_i\, a^i$ durch seine Komponenten a^i in der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ gegeben. Eine enorm nützliche Abkürzung ist die *Einsteinsche Summenkonvention*, bei der Ausdrücke, in denen ein Indexname doppelt vorkommt, als Summen zu verstehen sind, also

$$\vec{e}_i\, a^i = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i\, a^i = \vec{e}_1\, a^1 + \vec{e}_2\, a^2 + \ldots + \vec{e}_n\, \vec{a}^n \quad \text{und} \quad a^i\, b^i = \sum_{i=1}^{n} a^i\, b^i = a^1\, b^1 + a^2\, b^2 + \ldots a^n\, b^n\,.$$

Im Falle einer orthonormalen Basis $\{\vec{e}_i : i = 1, \ldots, n\}$ stellt der zweite Ausdruck das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i\, b^i$ dar.
Hinweis: Man liest a^i als „a i“, und nicht etwa „a hoch i“ oder „a oben i“. Gewöhnen Sie sich gleich daran, dass die Indizes von Vektor-Komponenten oben stehen.

[P1] *Satz des Pythagoras*
Geben Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \vec{e}_1\, a^1 + \vec{e}_2\, a^2$ an. Was ergibt sich für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a^2 \\ a^1 \end{pmatrix}$, und welche geometrische Beziehung besteht zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a}_\perp$? Welche geometrischen Beziehungen bestehen weiter zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2a^1 \\ 2a^2 \end{pmatrix}$ sowie zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c} = \vec{a} - \vec{a}_\perp$?
Hinweis: Skizzieren Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{a}_\perp$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

[P2] *Volumen*
Das Volumen des Spats mit Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im dreidimensionalen Raum ist das durch

$$\det \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} = a^1 b^2 c^3 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^1 c^2 - a^1 b^3 c^2 - a^2 b^1 c^3 - a^3 b^2 c^1$$

bezeichnete Vielfache des Einheitsvolumens $\mathfrak{e} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$.

(a) Ordnen Sie die Terme nach Faktoren a^1, a^2 und a^3. Wie lauten die Faktoren vor den a^i ausgedrückt durch die b^j und c^k ?
(b) Das Volumen hat die Form eines Skalarproduktes von $\vec{a}$ mit einem Vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ im Euklidischen Raum mit einer orthonormalen Basis. Dann nennt man die Größe $\vec{b} \times \vec{c}$ das *Kreuzprodukt* der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Geben Sie dessen Komponenten in dieser orthonormalen Basis durch Vergleich mit Ihrem Ergebnis aus (a) an. Rechnen Sie nach, dass $\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ist. Was bedeutet das?

[P3] *Projektion*
Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$ mit $c^3 \neq 0$. Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a} + \lambda\, \vec{c}$ in der 1-2-Ebene liegt, d.h., $\vec{a} + \lambda\, \vec{c} = \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Was ergibt sich demnach für a'^1 und a'^2 ?

[P4] *Zur Summenkonvention*
Betrachten Sie den Ausdruck $a^i b^i\, c^j d^j$. In dieser Schreibweise wird in keiner Weise deutlich gemacht, wie die beiden Summationen, einmal über i und einmal über j, auszuführen sind. Machen Sie sich durch explizites Ausschreiben klar, dass das Resultat nicht davon abhängt, ob Sie zuerst über i oder zuerst über j summieren.
Hinweis: Der Einfachheit halber genügt es hier, die Summationen über $i, j \in \{1, 2\}$ laufen zu lassen.

Bitte wenden!

RECHENFERTIGKEITEN

Drei einfache Aufgaben, an denen wichtige Rechentechniken geübt werden.

[P5] *Fakultät*
Es bezeichnet $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ aller natürlichen Zahlen bis n. Man setzt $0! = 1$. Berechnen Sie $5!$ und $6!/(2 \cdot 3)$. Was ist allgemein $\frac{n!}{n}$?

[P6] *Euklidischer Kürzungsalgorithmus*
Was ist die kleinste Einheit, die man mit zwei Maßstäben mit den Längen $25\,\mathrm{cm}$ und $17\,\mathrm{cm}$ abmessen kann? Und welche kleinste Einheit lässt sich mit den Maßstäben $462\,\mathrm{mm}$ und $105\,\mathrm{mm}$ messen?
Hinweis: Betrachten Sie Reste, Reste von Resten usw.

[P7] *Winkelsumme*
Zeigen Sie, dass die Winkelsumme in einem Dreieck immer π, also $180°$, ergibt. Oder besser: Überlegen Sie allgemein, dass die Winkelsumme der Innenwinkel in einem n-Eck immer $(n-2)\pi$ beträgt.