

INTEGRIEREN

Wir üben einige wichtige Integrale, die in der Physik auftreten, besonders das Volumenintegral.

[P36] *Potential*

Wir betrachten noch einmal das Kepler-Problem. Für eine Punktmasse m an der Stelle \vec{r}' ist das Potential an der Stelle \vec{r} gegeben durch $V(\vec{r}) = -\frac{G_N m}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit Dichtefunktion $\rho(\vec{r}')$ hat man dann das Potential

$$V(\vec{r}) = - \int d^3 r' \frac{G_N \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{mit} \quad \int d^3 r' \rho(\vec{r}') = M,$$

wobei M die Gesamtmasse der Massenverteilung ist. Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber eine kugelförmige Massenverteilung mit Radius R_+ und homogener Dichte

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{wenn } R_- \leq r' \leq R_+, \\ 0 & \text{wenn } r' < R_- \text{ oder } R_+ < r'. \end{cases}$$

- Das Problem ist rotationssymmetrisch. Es bieten sich daher sphärische Koordinaten an. Wie lautet $d^3 r$ in Kugelkoordinaten?
- Zeigen Sie für $r > R_+$, dass tatsächlich das Potential $V(r) = -\frac{\alpha M}{r}$ identisch zu dem einer Punktladung mit der Gesamtmasse M ist.
- Zeigen Sie für $r < R_-$, dass das Potential $V(r) \equiv 0$ im Innern der Kugelschale verschwindet.
- Betrachten Sie die Vollkugel, d.h. $R_- = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im Innern der Massenverteilung, also für $r < R_+$, gegeben ist durch $V(r) = \frac{G_N M}{2R_+} \left(\frac{r^2}{R_+^2} - 3 \right)$.

[P37] *Wegintegral*

Berechnen Sie die Weglänge

$$\ell[\Gamma] = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} dt \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2}$$

der Bahnkurve $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, \sqrt{1 - (a\omega t)^2})$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\bar{t} = 1/(a\omega)$.
Hinweis: Die Ableitung von $\arcsin x$ ist $1/\sqrt{1-x^2}$.