

MATRIZEN

Mit Matrizen werden lineare Abbildungen von Vektorräumen beschrieben. Besonders häufig treten in der Physik lineare Abbildungen von Vektorräumen auf sich selbst auf. Damit können zum Beispiel Wechsel von Koordinatensystemen beschrieben werden, die auftreten, wenn man von einem ruhenden Bezugssystem in ein anderes, z.B. bewegtes, Bezugssystem wechselt.

[P19] Lorentz-Boosts¹

Wir betrachten eine 1 + 1-dimensionale Raumzeit. Ereignisse werden also durch Angaben $x = (x^0, x^1)$ charakterisiert. Diese Ereignisse fassen wir als Elemente eines zwei-dimensionalen Vektorraumes auf. Es ist $x^0 = t$ die Zeit, und x^1 die Ortskoordinate. Wir betrachten nun folgende lineare Abbildungen dieses zwei-dimensionalen Vektorraumes auf sich:

$$L_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Matrizen eine Gruppe formen, dass also das Produkt $L_u L_v = L_w$ für eine geeignete Funktion $w(u, v)$ ist.

- Wir definieren $\eta(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1$. Zeigen Sie, dass $\eta(L_v x, L_v x) = \eta(x, x)$ ist. Berechnen Sie die Determinante $\det L_v$.
- Multiplizieren Sie $L_u L_v$ und versuchen Sie, das Ergebnis direkt in der Form L_w zu schreiben. Nennen Sie dazu das Matrix-Element $(L_w)_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ und lösen Sie nach w auf. Überzeugen Sie sich, dass $w \neq u + v$ ist.
- Wir führen folgende Notation ein (hier könnte Ihnen [P11] wieder einfallen):

$$\begin{aligned} c(k(v)) &= \frac{1}{2} \left(k(v) + \frac{1}{k(v)} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \text{mit } k(v) &= \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \\ s(k(v)) &= \frac{1}{2} \left(k(v) - \frac{1}{k(v)} \right) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

Drücken Sie L_v in dieser Notation aus. Zeigen Sie, dass $c^2(k) - s^2(k) = 1$ ist. Zeigen Sie weiter, dass für alle reellen v , $|v| < 1$, gilt, dass $c(k) \geq 1$. Wann ist $c(k) = 1$?

Anmerkung: Es wird $k(v)$ der Dopplerfaktor genannt, und $\sigma(v) = \ln k(v)$ wird als *Schnelligkeit* bezeichnet.

- Es gelten die folgenden Relationen (siehe [H1]):

$$\begin{aligned} s(k \cdot k') &= s(k)c(k') + c(k)s(k'), \\ c(k \cdot k') &= c(k)c(k') + s(k)s(k'). \end{aligned}$$

Drücken Sie damit das Produkt $L_u L_v$ in möglichst einfacher Form aus.

- Betrachten Sie einen ruhenden Beobachter, gegeben durch die Weltlinie $f : t \mapsto (t, 0)$. Wie bewegt sich der Beobachter nach einem Boost L_v ?
- Betrachten Sie einen Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $x^1(t)/t = 1$ bewegt. Wie lautet die Weltlinie für diesen Punkt? Wie bewegt sich dieser Punkt nach einem Boost mit L_v ?
- In (b) haben Sie $w(u, v)$ bestimmt. In (d) haben Sie gesehen, dass $k(w) = k(u) \cdot k(v)$, also $\sigma(w) = \sigma(u) + \sigma(v)$ ist. Vergleichen Sie zum Abschluss nun die Funktion $w(u, v)$ mit $\tan(\alpha + \beta)$.

[P20] Übungen zur Indexnotation

Was besagen die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (M^\top)_j^i &= M_j^i, \\ (ML)_j^i &= M_k^i L_j^k, \\ (a \times b)^i &= \epsilon g^{ij} \epsilon_{jkl} a^k b^l, \end{aligned}$$

in einer volumennormierten Orthonormalbasis explizit für $(M^\top)_1^1$, $(M^\top)_1^2$, $(ML)_1^2$, $(a \times b)^1$, $(a \times b)^2$ und $(a \times b)^3$?

¹Ein gutes, wenn auch leider nicht gebräuchliches, deutsches Wort für Boost ist *Schub*.