EIGENWERTE, EIGENVEKTOREN UND INVERSES VON MATRIZEN

Die Eigenvektoren und Eigenwerten einer diagonalisierbaren linearen Abbildung charakterisieren diese vollständig. Wir üben deren konkrete Berechnung und wiederholen ein paar Grundlagen zum Inversen einer Matrix.

[P21] *Eigenwerte*
Betrachten Sie eine reelle 2×2 Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Wann hat diese Matrix M reelle, und wann komplexe Eigenwerte?

Berechnen Sie die Eigenwerte für die folgenden beiden Beispiele explizit, und prüfen Sie, ob diese reell oder komplex sind:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

Interpretieren Sie, um was für Abbildungen es sich jeweils handelt. *Hinweis*: Die Matrix $2M$ hat die Eigenwerte 2λ.

[P22] *Nochmals Lorentz-Boosts*
Betrachten Sie einen Lorentz-Boost in einer $1+1$-dimensionalen Raumzeit,

$$L_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix. Es sei λ_v einer der Eigenwerte, und e_+ der zugehörige Eigenvektor. Berechnen Sie aus $L_u\, L_v e_+ = \lambda_u \lambda_v e_+$ das Gruppengesetz $L_w = L_u\, L_v$, also die Funktion $w(u,v)$.

[P23] *Minoren und Inverses*
Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Bearbeiten Sie diese Aufgabe ausschließlich aus dem Kopf, ohne in Ihre Unterlagen zu sehen. Damit können Sie überprüfen, ob Sie die entsprechenden Teile der Vorlesung verstanden haben.

(a) Was ist die Determinante der Matrix M?
(b) Geben Sie die Matrix m an, die in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte den Minor $m^i{}_j$ enthält. Der Minor $m^i{}_j$ der Matrix M ist die Determinante der Untermatrix, die durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entsteht.
(c) Bilden Sie die Adjunkte N durch die Vorschrift $N^i{}_j = (-1)^{i+j} (m^\top)^i{}_j$. *Hinweis*: Wiederholen Sie die Begriffe Minor, Kofaktor und Adjunkte aus der Vorlesung.
(d) Berechnen Sie NM und zeigen Sie $N = M^{-1} \det M$.
(e) Gehen Sie die Schritte (a) bis (d) an folgendem Beispiel explizit durch:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(f) Zeigen Sie für beliebige $n \times n$ Matrizen L, dass $(L^\top)^{-1} = (L^{-1})^\top$ ist.