**Theoretische Physik II**
**für Lehramtsstudenten**
**WS 2005/06**

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

## 1. Übung

(Abgabe: 25.10.2005)

1. *Vollständigkeit von normierten Vektorräumen*: Im Vektorraum $C^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der sogenannten $L^1$-Norm $||f||_1 := \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sei eine Folge $(f_n)$ definiert durch
$$f_n(t) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ n(t-\frac{1}{2})\,, & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]\,, \\ 1\,, & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$
Zeigen Sie, daß $(f_n)$ eine Cauchy-Folge ist, aber nicht in $C^0([0,1])$ konvergiert! Damit ist bewiesen, daß $(C^0([0,1]), ||\cdot||)$ kein Banachraum ist. In der Quantenmechanik werden vollständige Vektorräume mit Skalarprodukt (Hilberträume) betrachtet. (4)

2. *Polarisationsformel*: Auf einem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ über $\mathbb{K}$ wird eine Norm definiert durch $||v||^2 := \langle v|v\rangle$. Drücken Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ das Skalarprodukt $\langle v|w\rangle$ zwischen Vektoren $v, w \in V$ durch diese Norm aus. Zeigen Sie, daß für eine so definierte Norm die Parallelogrammgleichung
$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$$
gilt. (4)
[Besonders Interessierte können sich überlegen, warum auch die Umkehrung gilt: Die Norm auf einem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ erfülle die Parallelogrammgleichung. Zeigen Sie, daß man über die Polarisationsformel ein Skalarprodukt auf $V$ definieren kann.] (+8)

3. *Eigenwerte hermitescher und unitärer Operatoren*: Zeigen Sie, daß hermitesche Operatoren reelle Eigenwerte und unitäre Operatoren Eigenwerte vom Betrag 1 haben. (3)

4. *Berechnung von Skalarprodukten*:
   (a) Im $\mathbb{C}^n$ mit Orthonormalbasis $|\Lambda_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$ seien zwei Vektoren $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i |\Lambda_i\rangle$, $|\chi\rangle = \sum_{i=1}^n \chi_i |\Lambda_i\rangle$ gegeben. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt der Vektoren gegeben ist durch $\langle\psi|\chi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i^* \chi_i$! (1)
   (b) Im kontinuierlichen Fall werde ein Vektor $|\psi\rangle$ in der Ortseigenbasis $\{|\Lambda_x\rangle\}$ mit $\langle\Lambda_x|\Lambda_y\rangle = \delta(x-y)$ zerlegt in $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)|\Lambda_x\rangle$, Analoges gelte für einen Vektor $|\chi\rangle$. Zeigen Sie, daß die Relationen $\psi(y) = \langle\Lambda_y|\psi\rangle$ und $\langle\psi|\chi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\chi(x)$ gelten. (1)
   [Bemerkung: Der Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ ist der Raum der Funktionen, für die die so definerte Norm $||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2$ endlich ist.]
   (c) Berechnen Sie aus der Forderung $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ für einen Zustand $|\psi\rangle$ mit $\psi(x) = c\,\mathrm{e}^{-x^2/2x_0^2}$ die Normierungskonstante $c$. Die Impulseigenzustände $|\Gamma_p\rangle$ mit $\hat{p}|\Gamma_p\rangle = p|\Gamma_p\rangle$ haben Wellenfunktionen $\Gamma_p(x) = \langle\Lambda_x|\Gamma_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\Gamma_p|\psi\rangle$! (2)