Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

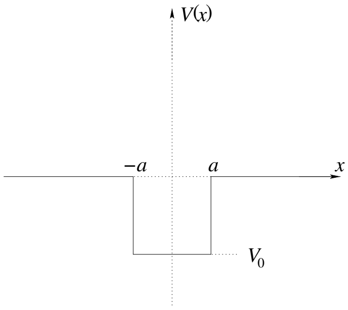
---

5. Übung

(Abgabe: 22.11.2005)

13. *Der endliche Potentialtopf*: Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| \leq a\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



mit $V_0 > 0$. Der Hamiltonoperator dieses Systems ist $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Im folgenden untersuchen wir nacheinander Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit negativer Energie E ($-V_0 \leq E \leq 0$, „gebundene Zustände") und positiver Energie $E > 0$ („Streuzustände").

(a) Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall $-V_0 \leq E \leq 0$.

(i) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung getrennt in den Bereichen mit Potential $V(x) = -V_0$, also $|x| \leq a$ (analog zur Präsenzübungsaufgabe), und mit Potential $V(x) = 0$ (also $x < -a$, $x > a$)! Wählen Sie dabei aus den zwei linear unabhängigen Lösungen der Schrödingergleichung für $x < -a$ bzw. $x > a$ die normierbare Lösung aus. (3 P.)

(ii) Setzen Sie aus den so erhaltenen abschnittsweisen Lösungen der Schrödingergleichung eine global (d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$) definierte Lösungen $\psi(x)$ zusammen. Gehen Sie dabei so vor, daß Sie eine gerade Funktion $\psi_e(x) = \psi_e(-x)$ und eine ungerade Funktion $\psi_o(x) = -\psi_o(-x)$ erhalten. (1 P.)

(iii) Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen der geraden Lösung $\psi_e(x)$ und ihrer Ableitung $\psi'_e(x)$ bei $x = \pm a$ an. Es ist hilfreich, diese Anschlußbedingungen mit Hilfe des Parameters $\zeta := \sqrt{2mV_0}a/\hbar$ zu diskutieren. Machen Sie sich anhand einer Skizze der auftretenden Funktionen klar, daß für alle Werte von $\zeta > 0$ Lösungen existieren; warum wächst die die Zahl der geraden Bindungszustände mit wachsendem ζ?(3 P.)

(iv) Analysieren Sie analog die Anschlußbedingungen für die ungeraden Lösungen $\psi_o(x)$ mit Hilfe des Parameters ζ. Eine Skizze der auftretenden Funktionen sollte ergeben, daß ungerade Lösungen nur dann existieren, wenn $2mV_0a^2/\hbar^2 > \pi^2/4$ ist. (3 P.)

(b) Wir wenden uns nun dem Fall $E > 0$ zu.

(i) Als Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung erhält man (mit sechs zunächst unbestimmten Koeffizienten A, B, C, D, F, G)

$$\psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x < -a\,, \\ C\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} & \text{für } -a < x < a\,, \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x > a\,. \end{cases}$$

Dabei werden die ebenen Wellen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ als rechtslaufende Wellen interpretiert, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ als linkslaufende Wellen. Bestimmen Sie k und q aus der Schrödingergleichung! Wie ist die linkslaufende Welle für $x < -a$ zu deuten? (2 P.)

(ii) Geben Sie die Anschlußbedingungen (die Stetigkeitsbedingungen für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$) bei $x = -a$ als Matrixgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

an. (2)

(iii) Finden Sie analog eine Matrixgleichung für die Anschlußbedingung bei $x = a$. Finden Sie mit Hilfe von (ii) eine Matrixgleichung, die A, B mit F, G in Verbindung setzt. (4 P.)

(iv) Im Falle eines von links einlaufenden Teilchens ist $G = 0$. Bestimmen Sie in dieser Situation einen Ausdruck für die „Transmissionsamplitude“ $S(E) := \frac{F}{A}$. (1 P.)