Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
Harmonischer Oszillator
Abgabe: 02. November 2007

Die folgenden Übungen behandeln den harmonischen Oszillator. Diese spielt in der Quantenmechanik eine ganz wichtige Rolle. Mit ihm kann man verstehen, warum in quantemechanischen Systemen nur bestimmte Energien erlaubt sind, warum es im Mikrokosmos überhaupt quantisiert zugeht.

1. *Der klassische harmonische Oszillator*: Die Bewegungsgleichung des freien harmonischen Oszillators lautet $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

   (a) Wiederholen Sie die Herleitung dieser Gleichung aus den beiden Annahmen, dass erstens die Kraft eines Oszillators (zum Beispiel einer Feder) gemäß Hook's Gesetz proportional zu der Auslenkung ist, also $F = -kx$, und dass zweitens die Kraft nach Newton's zweitem Gesetz allgemein durch Masse mal Beschleunigung, $F = ma = m\ddot{x}$, gegeben ist. Setzen Sie dann $\omega^2 = k/m$. **[1P]**

   (b) Finden Sie sodann die allgemeine Form der Lösung dieser Bewegungsgleichung. **[3P]**

   (c) Überprüfen Sie, dass die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ erhalten ist. Hierbei ist die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ mit $p = m\dot{x}$, und die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Begründen Sie, warum das Potential diese Form hat. **[2P]**

2. *Der harmonische Oszillator in de Quantenmechanik*: Die Schrödingergleichung der Quantemechanik lautet für den harmonischen Oszillator

$$H\Psi(x) = \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2\right)\Psi(x) = E\Psi(x)\,,$$

   wobei $P = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ist. Um diese Gleichung lösen zu können, gehen Sie wie folgt vor:

   (a) Vergleichen Sie diese Gleichung mit der Gleichung für die Energie-Erhaltung beim klassischen harmonischen Oszillator. Welche Gemeinsamkeiten sehen Sie, welche Unterschiede fallen Ihnen auf? **[2P]**

   (b) Machen Sie einen Ansatz für $\Psi(x)$ in Form einer Potenzreihe, also

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

   Leiten Sie aus der Schrödingergleichung eine Beziehung für die Koeffizienten a_n her. **[5P]**

   (c) Die Lösung $\Psi(x)$ muss normierbar sein, es muss also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$$

   sein. Man kann zeigen, dass dies nur geht, wenn die Potenzreihe abbricht, also zu einem Polynom wird. Leiten Sie daraus her, dass nur die Energien $E_N = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, erlaubt sind. Zeigen Sie insbesondere, dass die kleinste erlaubte Energie in der Tat $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega > 0$ ist, dass also die Energie $E = 0$ nicht erlaubt ist. Man spricht hier von der Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators. **[5P]**

(d) Plotten Sie die Wellenfunktionen

$$\Psi_N(x) = \sqrt{\frac{1}{2^N N!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_N\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)$$

für die ersten erlaubten Energien $E_N = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$, $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Hierbei sind die Polynome $H_N(z)$ die sogenannten Hermite-Polynome. Der Vorfaktor ergibt sich durch die Normierungsbedingung $\langle\Psi_N|\Psi_N\rangle = 1$. **[3P]**

[Wer will, kann auch beweisen, dass die Normierbarkeit von $\Psi(x)$ erzwingt, dass die Potenzreihe abbrechen muss, und den oben angegebenen Normierungsfaktor herleiten.] **[+5P]**

Hinweis: Die Hermite-Polynome sind durch die folgende Beziehung definiert:

$$H_N(z) = (-1)^N e^{z^2} \frac{d^N}{dz^N} e^{-z^2} .$$