Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
Erwartungswerte und Unschärfe
30. Oktober 2007

In den folgenden Übungen wollen wir die Erkenntnisse der Vorlesungen auf Messungen des Spins des Elektrons anwenden. Dazu benötigen wir auch die Resultate aus der Präsenzübung I, insbesondere die drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Allgemeines Gemisch*: Finden Sie die allgemeinste Dichte-Matrix ρ eines Zweizustandssystems (der Spin hat nur zwei mögiche Ausrichtungen). Diese Dichtematrix ρ muss hermitesch sein und $(\mathrm{tr}\rho) = 1$ erfüllen (warum?). Aus Präsenzübung I folgt, dass $\rho = a\mathbb{1} + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist. Geben Sie ρ an und bestimmen Sie a. Bestimmen Sie dann die Eigenwerte von ρ. Nehmen Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d \geq 0$ an und überlegen Sie, dass $0 \leq d \leq 1/2$ sein muss.

2. *Erwartungswerte*: Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle S_i \rangle = \frac{\hbar}{2}\mathrm{tr}(\rho\sigma_i)$ für die Messung der Spinausrichtung bezüglich der Raumachsen x_i, $i = 1, 2, 3$.

3. *Schwankungsbreite*: Bestimmen Sie nun die Schwankungsquadrate $(\Delta S_i) = \langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left(\mathrm{tr}(\rho\sigma_i^2) - \mathrm{tr}(\rho\sigma_i)^2\right)$.

4. *Unschärferelation*: Überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation an ein paar Beispielen, d.h. zeigen Sie, dass
$$(\Delta S_i)(\Delta S_j) \geq \frac{1}{2}\left|\langle [S_i, S_j] \rangle\right|, \quad i \neq j,$$
ist, wobei $[S_i, S_j] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_i, \sigma_j] = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i)$ ist.

5. *Allgemeine Messung*: Jeder Messaparat A in unserem Modell hat zwei mögliche Messwerte, und wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Messwert, der zum größeren Eigenwert von ρ gehört, gemessen wird. Der zugehörige erste Eigenzustand zum Messapparat A muss die Form
$$|\Lambda\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}$$
haben. Überprüfen Sie, dass dieser Zustand in der Tat normiert ist, dass also $\langle\Lambda|\Lambda\rangle = 1$ ist. Überlegen Sie, dass dieser Zustand in der Tat der Eigenzustand zum Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ des Spin-1/2-Operators
$$S_{\theta,\varphi} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3\right)$$
darstellt. Hierbei sind die e_i die Komponenten eines Einheitsvektors
$$\vec{e}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Interpretieren Sie die Winkel θ und φ und damit, was eigentlich A genau misst.

   Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des ersten Messwertes von A bei einem Gemisch ρ, also
$$w(1, A, \rho) = w(\uparrow_{\theta,\varphi}) = \langle\Lambda|\rho\Lambda\rangle.$$
Hierbei können Sie der Einfachheit halber ρ in diagonaler Form verwenden. Sie sollten als Ergebnis $1/2 + d\cos\theta$ erhalten.