Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer

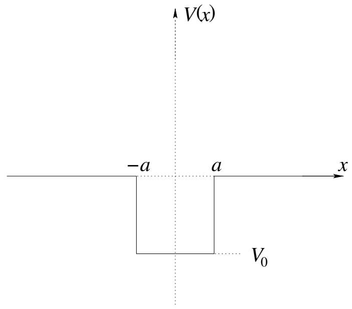
Endlicher Potentialtopf

Abgabe: 09. November 2007

Die folgenden Übungen behandeln den endlich tiefen Potentialtopf. Diese spielt in der Quantenmechanik eine ganz wichtige Rolle. Man kann ihn als ein sehr vereinfachtes Atom-Modell ansehen. Wichtiger ist jedoch, dass man an diesem Beispiel auch Streuzustände studieren kann.

1. *Der endliche Potentialtopf*: Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| \le a\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



mit $V_0 > 0$. Der Hamilton-Operator dieses Systems ist $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Im folgenden untersuchen wir nacheinander Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit negativer Energie E mit $-V_0 \le E \le 0$, die "gebundene Zustände", und positiver Energie $E > 0$, die "Streuzustände".

Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall $-V_0 \le E \le 0$.

(i) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung getrennt in den Bereichen mit Potential $V(x) = -V_0$, also $|x| \le a$ (analog zur Präsenzübung IV), und mit Potential $V(x) = 0$ (also $x < -a$, $x > a$). Wählen Sie dabei aus den zwei linear unabhängigen Lösungen der Schrödingergleichung für $x < -a$ bzw. $x > a$ die normierbare Lösung aus. **[3P]**

(ii) Setzen Sie aus den so erhaltenen abschnittsweisen Lösungen der Schrödingergleichung eine global (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$) definierte Lösungen $\Psi(x)$ zusammen. Gehen Sie dabei so vor, dass Sie eine gerade Funktion $\Psi_e(x) = \Psi_e(-x)$ und eine ungerade Funktion $\Psi_o(x) = -\Psi_o(-x)$ erhalten. **[1P]**

(iii) Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen der geraden Lösung $\Psi_e(x)$ und ihrer Ableitung $\Psi_e'(x)$ bei $x = \pm a$ an. Es ist hilfreich, diese Anschlußbedingungen mit Hilfe des Parameters $\zeta := \sqrt{2mV_0}a/\hbar$ zu diskutieren. Machen Sie sich anhand einer Skizze der auftretenden Funktionen klar, dass für alle Werte von $\zeta > 0$ Lösungen existieren. Warum wächst die die Zahl der geraden Bindungszustände mit wachsendem ζ? **[3P]**

(iv) Analysieren Sie analog die Anschlußbedingungen für die ungeraden Lösungen $\Psi_o(x)$ mit Hilfe des Parameters ζ. Eine Skizze der auftretenden Funktionen sollte ergeben, dass ungerade Lösungen nur dann existieren, wenn $2mV_0a^2/\hbar^2 > \pi^2/4$ ist. **[3P]**

Wir wenden uns nun dem Fall $E > 0$ zu.

(v) Als Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung erhält man (mit sechs zunächst unbestimmten Koeffizienten A, B, C, D, F, G)

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x < -a\,, \\ C\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} & \text{für } -a < x < a\,, \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x > a\,. \end{cases}$$

Dabei werden die ebenen Wellen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ als rechtslaufende Wellen interpretiert, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ als linkslaufende Wellen. Bestimmen Sie k und q aus der Schrödingergleichung. Wie ist die linkslaufende Welle für $x < -a$ zu deuten? **[2P]**

(vi) Geben Sie die Anschlußbedingungen (die Stetigkeitsbedingungen für $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$) bei $x = -a$ als Matrixgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

an. **[2P]**

(vii) Finden Sie analog eine Matrixgleichung für die Anschlußbedingung bei $x = a$. Finden Sie mit Hilfe von (vi) eine Matrixgleichung, die A, B mit F, G in Verbindung setzt. **[4P]**

(viii) Im Falle eines von links einlaufenden Teilchens ist $G = 0$. Bestimmen Sie in dieser Situation einen Ausdruck für die "Transmissionsamplitude" $S(E) := \frac{F}{A}$. **[1P]**