# Anwesenheitsübungen XI

13. Januar bis 15. Januar

A11.1 *Dirac–Invarianten*

Die Überlagerungsabbildung $h : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}_+^\uparrow$, $g \mapsto \rho(g) = \Lambda$ der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe war durch die Gültigkeit folgender Identität definiert:

$$g\sigma_\mu g^+ = \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Ferner galt für $\widehat{\sigma}_0 = \sigma_0$, $\widehat{\sigma}_k = -\sigma_k$ die Beziehung (vgl. A10.2.3)

$$(g^+)^{-1}\widehat{\sigma}_\mu g^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu \widehat{\sigma}_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Daher ließ sich die Poincarégruppe auf zwei Weisen auf 2–Spinoren $\xi, \eta$ darstellen:

$$\rho(g, a)\xi = g\xi(\Lambda^{-1}(x - a)), \quad \widehat{\rho}(g, a)\eta = (g^+)^{-1}\eta(\Lambda^{-1}(x - a)).$$

Wenn $\psi = \binom{\xi}{\eta}$ die Diracgleichung $\mathrm{i}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi$ löst, so auch $D(g, a)\psi$, wobei

$$D(g, a)\psi = \begin{pmatrix} \rho\,\xi \\ \widehat{\rho}\,\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^+)^{-1} \end{pmatrix} \psi(\Lambda^{-1}(x - a)) = S(g)\psi(\Lambda^{-1}(x - a)).$$

In dieser Weyldarstellung haben die $\gamma-$Matrizen die spezielle Form

$$\gamma^0 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Zeige für diese Darstellung, daß $\gamma^5 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$. Folgere $[S(g), \gamma^5] = 0$.
(2) Folgere aus der Definition der Überlagerungsabbildung: $S(g)^{-1}\gamma^\mu S(g) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.
(3) Zeige, daß $S(g)^+\gamma^0 S(g) = \gamma^0$.

Wir definieren den *adjungierten Spinor*

$$\overline{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$$

und damit folgende bilinearen (warum reellen?) Ausdrücke:

$$\begin{array}{rl} \text{Skalar} & s = \overline{\psi}(x)\psi(x) \\ \text{Pseudoskalar} & \widetilde{s} = \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \\ \text{Vektorstrom} & j^\mu = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \\ \text{Axialvektorstrom} & \widetilde{j}^\mu = \overline{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x) \\ \text{antisymmetrischer Tensor} & B^{\mu\nu} = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi(x) \quad (\mu > \nu) \end{array} \qquad (*)$$

(4) Rechne nach, daß sich obige Größen unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen tatsächlich als Skalar, Vektor bzw. Tensor transformieren.

Wir definieren die *Parität* $\mathcal{P}$, die *Zeitumkehr* $\mathcal{T}$ und die *Ladungskonjugation* $\mathcal{C}$ als

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi(x) &= \gamma^0\psi(Px) \\
\mathcal{T}\psi(x) &= \gamma^2\gamma^0\psi^*(Tx) = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\psi^*(Tx) \\
\mathcal{C}\psi(x) &= \gamma^2\gamma^5\psi^*(x)
\end{aligned}$$

(5) Zeige, daß $\mathcal{P}\psi$ die Diracgleichung löst, wenn $\psi$ eine Lösung ist.
(6) Berechne die Wirkung von $\mathcal{P}$ auf $(*)$. Wie unterscheiden sich $s$, $j$ von $\widetilde{s}$, $\widetilde{j}$?
(7) Zeige, daß Lösungen der Weylgleichungen (d.h. $W\eta = 0$ bzw. $\widehat{W}\xi = 0$ im Falle $m = 0$) unter $\mathcal{T}$ in eben solche übergehen (wie wir in A10.2.6 gesehen haben, gilt das nicht für $\mathcal{P}$). Folgere, daß mit $\psi$ auch $\mathcal{T}\psi$ eine Lösung der Diracgleichung ist.
(8) Zeige, daß der ladungskonjugierte Spinor $\mathcal{C}\psi$ die Diracgleichung löst, wenn $\psi$ eine Lösung ist. Wie sieht dies in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes aus?
(9) Berechne $\mathcal{PTC}$ und interpretiere diese Transformation.
(10) Berechne die Wirkung von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{C}$ auf $(*)$.

---

## Hausaufgaben XI

Abgabe vom 20. Januar bis 22. Januar in den Übungen

H11.1 *Diracgleichung im kugelsymmetrischen elektrischen Feld* (30 Punkte)

Dieses Problem wurde 1928 unabhängig von G. Darwin und W. Gordon gelöst. Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, Ladung $q$ und Masse $m$ bewege sich im kugelsymmetrischen elektrischen Feld ($qA_0 = V(r)$, $\vec{A} = 0$). Die Diracgleichung lautet allgemein

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}A_\mu\right)\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi$$

und läßt sich auf folgende Form bringen:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^0}\psi = \left(-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}A_k\right) + \beta\frac{mc}{\hbar} + \frac{1}{\hbar c}V(r)\right)\psi.$$

(1) Zeige, daß der Zusammenhang zwischen den Matrizen $\alpha^k$ und $\beta$ mit den $\gamma^\mu$ lautet: $\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$, $\beta = \gamma^0$. Berechne $\alpha^k\alpha^\ell + \alpha^\ell\alpha^k$ sowie $\beta^2$ und $\beta\alpha^k + \alpha^k\beta$.
(2) Setze $\psi(x) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{Et}{\hbar}}$ an und leite die Eigenwertgleichung für $\psi_0(\vec{r})$ her:

$$H\psi = \left(-i\hbar c\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k} + \beta mc^2 + V(r)\right)\psi_0(\vec{r}) = E\psi_0(\vec{r}).$$

(3) Zeige: mit $\psi_0(\vec{r})$ ist auch $\mathcal{P}\psi_0(\vec{r}) = \beta P\psi_0(\vec{r}) = \beta\psi_0(-\vec{r})$ Lösung dieser Gleichung. Was bedeutet $\mathcal{P}$? Warum kann oBdA $\mathcal{P}\psi_0 = \pm\psi_0$ angenommen werden?
(4) Zeige, daß der Gesamtdrehimpulsoperator $\vec{J}$ mit $H$ und $\mathcal{P}$ kommutiert.

Nach (3) und (4) können die Eigenfunktionen von $H$ als Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$, $J_3$ und $\mathcal{P}$ gewählt werden. Für die Kugelspinoren $\Phi_{\ell j m_j}$ gilt (TP II, H9.1)

$$\vec{J}^2\Phi_{\ell j m_j} = \hbar^2 j(j+1)\Phi_{\ell j m_j}, \quad J_3\Phi_{\ell j m_j} = \hbar m_j \Phi_{\ell j m_j}, \quad P\Phi_{\ell j m_j} = (-1)^\ell \Phi_{\ell j m_j}.$$

Zu einem $j-$Wert gehören die $\ell-$Werte $j \pm \frac{1}{2}$, d.h. verschiedene Ortsraumparitäten.

(5) Zeige, daß die Eigenfunktionen von $\vec{J}^2$, $J_3$ und $\mathcal{P}$ von folgender Form sein müssen:

$$\psi_0(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Phi_{\ell=j\mp\frac{1}{2}\, jm_j} \times \text{Radialfunktion } F(r) \\ \Phi_{\ell'=j\pm\frac{1}{2}\, jm_j} \times \text{Radialfunktion } G(r) \end{pmatrix}$$

Zwei weitere in TP II, H9.1 bewiesene Eigenschaften: hat man für gegebene $j$, $m_j$ einen Kugelspinor $\Phi_{\ell j m_j}$, so erhält man den Kugelspinor mit der anderen Parität als

$$\Phi_{\ell'=j\pm\frac{1}{2}\, jm_j} = \vec{\sigma}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\Phi_{\ell=j\mp\frac{1}{2}\, jm_j}.$$

Ferner sind die Kugelspinoren Eigenfunktionen des Operators $K = 1 + \frac{1}{\hbar}\vec{\sigma}(\vec{L})$:

$$K\Phi_{\ell j m_j} = \kappa\Phi_{\ell j m_j}, \quad \kappa = \begin{cases} \ell+1, & \text{falls } \ell = j - \frac{1}{2} \\ -\ell, & \text{falls } \ell = j + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(6) Zeige mit diesen Eigenschaften, daß mit dem Ansatz aus (5) für die Radialfunktionen $F(r) = f(r)$ und $G(r) = -ig(r)$ folgende Differentialgleichungen gelten:

$$\hbar c\left(f'(r) + \frac{1-\kappa}{r}f(r)\right) - (E + mc^2 - V(r))g(r) = 0$$
$$\hbar c\left(g'(r) + \frac{1+\kappa}{r}g(r)\right) + (E - mc^2 - V(r))f(r) = 0.$$

(7) Sei jetzt speziell $V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\hbar c\frac{Z\alpha}{r}$. Zeige, daß $f, g \sim \mathrm{e}^{-\lambda r}$ für $r \to \infty$ mit $\lambda = \frac{1}{\hbar c}\sqrt{m^2c^4 - E^2}$ und daß $f, g \sim r^{\gamma-1}$ für $r \to 0$ mit $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$.

(8) Betrachte in der Variablen $\varrho = \lambda r$ neue Radialfunktionen $\varphi_\pm(\varrho)$, definiert durch $\binom{f(\varrho)}{g(\varrho)} = V_+\varphi_+(\varrho) + V_-\varphi_-(\varrho)$ mit $V_\pm = \binom{1}{\pm b^{-1}}$, $b = \frac{mc^2+E}{\sqrt{m^2c^4-E^2}} = \sqrt{\frac{mc^2+E}{mc^2-E}}$. Zeige

$$\left(\varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} + 1 + \frac{Z\alpha}{2}(b - b^{-1}) - \varrho\right)\varphi_+ + \left(-\kappa + \frac{Z\alpha}{2}(b + b^{-1})\right)\varphi_- = 0$$
$$\left(\varrho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} + 1 - \frac{Z\alpha}{2}(b - b^{-1}) + \varrho\right)\varphi_- - \left(-\kappa - \frac{Z\alpha}{2}(b + b^{-1})\right)\varphi_+ = 0.$$

(9) Eliminiere $\varphi_-$ in (8) und zeige für den durch die Betrachtung der Asymptotik in (7) motivierten Ansatz $\varphi_+ = \varrho^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\varrho}\varphi(y)$ mit $y = 2\varrho$, daß

$$\left(y\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + (2\gamma + 1 - y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \left(1 + \gamma - \frac{Z\alpha}{2}(1 - b^{-1})\right)\right)\varphi(y) = 0.$$

(10) Lese aus dieser Kummergleichung die Energieeigenwerte ab:

$$E = mc^2\left(1 + \left(\frac{Z\alpha}{n+\gamma}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und vergleiche mit dem nichtrelativistischen Ergebnis. Tritt noch Entartung auf?