Anwesenheitsübungen XIII

27. Januar bis 29. Januar

A13.1 *Die Lambverschiebung (Lambshift)*

Löst man die Diracgleichung im Coulombpotential (vgl. H11.1), so sind die Energieeigenwerte in einer Hauptschale neben der $m-$Entartung aufgrund der Drehinvarianz immer noch zusätzlich entartet, nämlich die Zustände mit gleichem j. Dagegen wird die $\ell-$Entartung des nichtrelativistischen Problems durch Effekte wie die Spin/Bahn–Kopplung (Feinstruktur) aufgehoben. Diese würde auch zunächst die $j-$Entartung aufheben, allerdings gibt es eben noch weitere Effekte wie den Dispersionsterm (vgl. H10.2), so daß in der vollen Lösung die Entartung wiederhergestellt ist.

Experimentell beobachtet man jedoch, daß die Zustände $2S_{j=\frac{1}{2}}$ und $2P_{j=\frac{1}{2}}$ nicht dieselbe Energie haben, was zuerst 1947 von Lamb und Retherford durchgeführt wurde. Wir verfolgen die Erklärung dieses Effekts nach Bethe, auch in 1947.

Daneben gibt es durch die Wechselwirkung des Elektronen- mit dem Kernspin noch die Hyperfeinaufspaltung, deren Energieskala allerdings durch das gyromagnetische Verhältnis des Protons, d.h. durch die große Masse des Protons, unterdrückt wird.

Zwischen diesen Effekten Feinstruktur, Lambshift und Hyperfeinstruktur liegt jeweils etwa ein Faktor 10 in der Energieaufspaltung. Der absolute Wert der Feinstrukturaufspaltung befindet sich dabei im Bereich $10^{-4}\dots 10^{-5}$ der Übergangsenergien.

(1) Betrachte wie in A4.1 die Emission eines Photons mit Wellenzahl $\vec{k}$ und Polarisation λ durch ein Atom, das dabei vom Zustand $|n\rangle$ nach $|n'\rangle$ übergeht. In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie erhielten wir dabei die Übergangsrate, die Lebensdauer usw. Nun betreiben wir *stationäre* Störungstheorie. In erster Ordnung gibt es keinen Beitrag, da der Wechselwirkungsoperator

$$H' = -\frac{e}{mc}\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2}|\vec{A}(\vec{r},t)|^2 + e\,\underbrace{\Phi(\vec{r},t)}_{=0}$$

1- und 2-Photonenaustauschprozesse und daher keine Diagonalelemente enthält. In zweiter Ordnung kommt es aber zu einer Verschiebung des Energieniveaus, da das ausgestrahlte Photon wieder absorbiert werden kann, quantitativ gilt:

$$\Delta E_n = \sum_{n',\vec{k},\lambda} \frac{|\langle n',\vec{k},\lambda|H'|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'} - \hbar c|\vec{k}|}.$$

(2) Das Matrixelement des Wechselwirkungsoperators H' haben wir berechnet:

$$\langle n',\vec{k},\lambda|H'|n\rangle = -\frac{\sqrt{\hbar}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\langle n'|\vec{\jmath}(\vec{k})\cdot\vec{e}\,(\vec{k},\lambda)^*|n\rangle,$$

wobei $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$, $\vec{\jmath}(\vec{k}) = \frac{e}{m}\vec{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ die "fouriertransformierte" Stromdichte und $\vec{e}\,(\vec{k},\lambda)$ die Polarisationsvektoren der Photonen sind. Damit gilt dann:

$$\Delta E_n = \int \mathrm{d}k\, k\frac{\hbar}{4\pi^2 c}\sum_{n'}\frac{\int \mathrm{d}\Omega \sum_\lambda |\langle n'|\vec{\jmath}(\vec{k})\cdot\vec{e}\,(\vec{k},\lambda)^*|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'} - \hbar ck}.$$

(3) In der Langwellennäherung setzten wir $\vec{\jmath}(\vec{k}) = \vec{\jmath}(\vec{r}) = \frac{e}{m}\vec{p}$. Winkel–Integration und Summation über die beiden Polarisationen ergaben einen Faktor $\frac{8\pi}{3}$, so daß:

$$\Delta E_n = \frac{2e^2\hbar}{3\pi m^2 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'} - \hbar\omega}.$$

(4) Die Integration über ω ergibt einen unendlichen Beitrag. Um dies zu verstehen, führen wir dieselbe Rechnung für ein freies Elektron mit Impuls $\vec{q}$ aus:

$$\Delta E_{\vec{q}} = \frac{2e^2\hbar}{3\pi m^2 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega \int \frac{\mathrm{d}^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \vec{q}\,'|\vec{p}|\vec{q}\rangle|^2}{E_{\vec{q}} - E_{\vec{q}\,'} - \hbar\omega} = -\frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} |\vec{q}|^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\omega.$$

Auch dies ergibt einen Beitrag, der mit der gleichen Ordnung divergiert wie (3). Wir sehen jedoch, daß die Verschiebung proportional zu $\vec{p}^{\,2}$ ist, womit wir dies als Verschiebung der Elektronenmasse interpretieren können. Hat das Elektron ohne elektromagnetisches Feld die kinetische Energie $\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}$, d.h. die Masse m_0, so erhält es nun aufgrund der Wechselwirkung die *renormierte* Masse

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_0} - \frac{4e^2}{3\pi m^2 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega,$$

d.h. die kinetische Energie beträgt dann $\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$. Da wir aber die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld nicht abschalten können, ist diese "nackte" Masse m_0 nicht beobachtbar, sondern vielmehr ist m der tatsächlich gemessene Wert. Wir müssen also mit $H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0} - \frac{e^2}{r} + H'$ starten, dann gilt:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{r} + \underbrace{H' + \frac{2e^2\vec{p}^{\,2}}{3\pi m^2 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega}_{H'_{\text{ren.}}}.$$

(5) Das neue $H'_{\text{ren.}}$ liefert einen Beitrag in erster Ordnung Störungstheorie, der von derselben Größenordnung ist wie der aus der zweiten Ordnung von H', so daß für die Energiekorrekturen mit einem e^2 als Faktor vor dem ω–Integral gilt:

$$\Delta E_n = \frac{2e^2\hbar}{3\pi m^2 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega \left(\sum_{n'} \frac{|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'} - \hbar\omega} + \frac{\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle}{\hbar\omega} \right).$$

Mit der Vollständigkeitsrelation $\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle = \sum_{n'} |\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2$ gilt:

$$\Delta E_n = \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_{n'} |\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \frac{E_n - E_{n'}}{E_n - E_{n'} - \hbar\omega}.$$

(6) Dieses Integral ist immer noch logarithmisch divergent, wir machen es durch *Regularisierung* mit einem *Cutoff* Λ als obere Grenze bei $\hbar\omega = mc^2$ endlich. Dies

hätten wir auch bei den divergenten Integralen in (3) und (4) tun können, allerdings wäre das Ergebnis wegen der linearen Divergenz unvergleichbar sensitiver auf die Wahl. Daß man allerdings einfach diese Wahl (der Cutoff muß nur groß gegen alle im Problem auftretenden Energieskalen sein, ferner benutzt man, daß es keine geladenen Teilchen mit geringerer Masse als die des Elektrons gibt) treffen kann, entspricht einer weiteren Renormierung, nämlich die der elektrischen Ladung, die multiplikativ als laufende Kopplungkonstante geschieht:

$$e^2(\Lambda^2) = \frac{e_0^2}{1 - 12\frac{e_0^2}{\pi^2\hbar c}\ln\frac{m^2c^4}{\Lambda^2}},$$

wobei e_0 die nackte Ladung ist. Beachte, daß $e(\Lambda = mc^2) = e_0$. Nun kann man das Integral ausrechnen, dabei muß man den Pol im Nenner bedenken, so daß wir nur den Hauptwert betrachten, der dabei entstehende Imaginärteil kann als Zerfallsbreite interpretiert werden und interessiert uns nicht weiter:

$$\Delta E_n = \frac{2e^2}{3\pi\hbar m^2c^3}\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2\,(E_{n'} - E_n)\,\ln\frac{mc^2}{|E_{n'} - E_n|},$$

wobei die Energiedifferenzen $E_{n'} - E_n$ gegenüber mc^2 vernachlässigt wurden.

(7) Mit folgender Definition eliminieren wir den langsam veränderlichen Logarithmus aus der Summe über die intermediären Zustände $|n'\rangle$:

$$\ln(\delta E_n)_{\text{av}} = \frac{\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2(E_{n'} - E_n)\ln|E_{n'} - E_n|}{\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2(E_{n'} - E_n)}.$$

Damit gilt:

$$\Delta E_n = \frac{2e^2}{3\pi\hbar m^2c^3}\ln\frac{mc^2}{(\delta E_n)_{\text{av}}}\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2\,(E_{n'} - E_n).$$

Die Summe läßt sich nun umformen (H_0 der Hamiltonoperator des Atoms):

$$\sum_{n'}|\langle n'|\vec{p}|n\rangle|^2\,(E_{n'} - E_n) = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\langle n|[p_m,[p_m,H_0]]|n\rangle.$$

Der doppelte Kommutator liefert in diesem Fall eine Deltadistribution:

$$\Delta E_n = \frac{4e^4\hbar}{3m^2c^3}|\psi_n(0)|^2\ln\frac{mc^2}{(\delta E_n)_{\text{av}}}.$$

Daher gibt es nur einen Beitrag für $S-$Zustände ($|\psi_{nS}(0)|^2 = \frac{1}{\pi(nr_0)^3}$):

$$\Delta E_{nS} = \frac{1}{3\pi}\frac{e^2}{2r_0}\left(\frac{2\alpha}{n}\right)^3\ln\frac{mc^2}{(\delta E_{nS})_{\text{av}}},$$

wobei zur Orientierung $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ und $\frac{e^2}{2r_0} \approx 13.6$ eV.

(8) $(\delta E_{nS})_{\text{av}}$ ist nur numerisch zu berechnen, für den $2S-$Zustand ergibt sich der verglichen mit der Bindungsenergie riesige Betrag $(\delta E_{2S})_{\text{av}} = 248$ eV, damit ein Wert von $\ln\frac{mc^2}{(\delta E_{2S})_{\text{av}}} = 7.63$ und so für ΔE_{2S} eine Energieverschiebung, die einer Frequenz von 1034 MHz entspricht. Tatsächlich beobachtet werden 1057 MHz, die in einer echten quantenelektrodynamischen Rechnung voll reproduziert werden.

zweite Checkliste für die Klausur

Wir möchten empfehlen, neben der ersten Checkliste folgende Themen zu wiederholen:

- verschiedene Darstellungen der $\gamma-$Matrizen: A10.1
- Weylgleichung (insbesondere Spinoren unter Lorentztransformationen): A10.2
- Pauligleichung (insbesondere das Umschreiben der Diracgleichung in Schrödingerform, $g-$Faktor 2), Korrekturen wie die Spin/Bahn–Kopplung: H10.2
- bilineare Invarianten: A11.1
- Diracgleichung für das $H-$Atom (prinzipielles Vorgehen, Energieeigenwerte): H11.1