Anwesenheitsübungen II

28. Oktober bis 30. Oktober

A2.1 *Das Wigner/Eckart–Theorem*

Gelten für $2\ell+1$ Operatoren $T_{\ell M}$, $M=-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell$ die Vertauschungsrelationen

$$[J_\pm, T_{\ell M}] = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-M(M\pm 1)}\,T_{\ell(M\pm 1)} \quad \text{und} \quad [J_3, T_{\ell M}] = \hbar M\, T_{\ell M},$$

so bilden diese die Komponenten eines *sphärischen irreduziblen Tensoroperators ℓ-ter Stufe T_ℓ*. Man kann auch *kartesische* Komponenten definieren, z.B. für $\ell=1$:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(T_{1,-1}-T_{1,1}), \quad T_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(T_{1,1}+T_{1,-1}), \quad T_3 = T_{1,0}.$$

(1) Zeige für die kartesischen Komponenten dieses *Vektoroperators* (da $\ell=1$), daß

$$[J_m, T_n] = \mathrm{i}\hbar\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{mnk}T_k.$$

Das in der Vorlesung bewiesene *Wigner/Eckart–Theorem* besagt dann: Matrixelemente der $T_{\ell M}$ mit Drehimpuls–Eigenzuständen hängen nur über Clebsch/Gordan–Koeffizienten von $m-$Quantenzahlen ab, wobei der Faktor $\langle j||T_\ell||j'\rangle$ *reduziertes Matrixelement* heißt und unabhängig von den $m-$Quantenzahlen ist:

$$\langle j'm'|T_{\ell M}|jm\rangle = \langle jm\ell M|j\ell j'm'\rangle\,\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\,\langle j'||T_\ell||j\rangle.$$

(2) Zeige ohne Benutzung des Theorems, daß für das Nichtverschwinden des Matrixelements nötig ist:

$$m+M=m'.$$

(3) Zeige für einen *skalaren Operator* $S=T_{00}$ ($\ell=0$), daß

$$\langle j'm'|S|jm\rangle \sim \delta_{jj'}\delta_{mm'} \quad \text{und unabhängig von } m.$$

(4) Zeige für einen Vektoroperator, daß für ein nichtverschwindendes Matrixelement

$$|\Delta j| = |j-j'| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\Delta m| = |m-m'| \leq 1$$

sein muß, mit der zusätzlichen Bedingung, daß nicht $j=j'=0$ sein darf.

(5) Zeige: der Drehimpuls ist mit $J_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}J_\pm$, $J_0=J_3$ auch ein Vektoroperator.

(6) Beweise für Komponenten V_M eines Vektoroperators das sog. *Projektionstheorem*

$$\langle jm'|V_M|jm\rangle = \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)}\langle j\widetilde{m}|\vec{J}\cdot\vec{V}|j\widetilde{m}\rangle\langle jm'|J_M|jm\rangle.$$

Dabei ist $\widetilde{m}$ beliebig, d.h. $\vec{J}\cdot\vec{V}$ ist auf dem Raum mit festem j proportional zu $\mathbb{1}$.

(7) In der Aufgabe A3 der Klausur zur Theoretischen Physik II wurde ein Wasserstoffatom in einem elektrischen Quadrupolfeld betrachtet, das zu einem Stör–Hamiltonoperator $H' = c\,r^2\,Y_{20}$ führte. Zeige, daß alle Matrixelemente $\langle\psi|H'|\psi'\rangle$ zwischen Eigenzuständen ψ,ψ' aus der ersten und zweiten Hauptschale verschwinden, außer $\Delta E_m = \langle\psi_m|H'|\psi_m\rangle$, wobei der Kürze wegen die Zustände mit Drehimpulsquantenzahl $\ell=1$ und magnetischer Quantenzahl m in der zweiten Hauptschale mit ψ_m bezeichnet seien. Zeige auch, daß $\Delta E_1 = \Delta E_{-1} = -\frac{1}{2}\Delta E_0$.

Hausaufgaben II

Abgabe vom 4. November bis 6. November in den Übungen

H2.1 *Landé–Faktor*

Betrachte ein Atom in einem räumlich homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Das Feld sei so schwach, daß der Hamiltonoperator für die Störung durch $H' = \omega(L_z + 2S_z)$ gegeben ist, wobei $\omega = \frac{eB}{2mc}$ die Larmorfrequenz bezeichnet. Den Term mit dem Bahndrehimpuls kennen wir bereits aus dem linearen Zeemaneffekt (Theoretische Physik II, H7.1), der $g-$Faktor 2 beim Spin ist eine Konsequenz aus der relavistischen Natur des Spins und kann in der Diractheorie hergeleitet werden.

(1) Der Hamiltonoperator H des Atoms beinhalte noch den $\vec{L} \cdot \vec{S}$–Term, die Spin–Bahn–Kopplung (Theoretische Physik II, H9.2). Warum sind dann H, $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ und J_3 ein vollständiger Satz kommutierender Observablen?

(2) Warum hat ein Energieniveau mindestens $2j+1$ als Entartungsgrad?

(3) Zeige mit dem Projektionstheorem aus A2.1, daß $H' = g_J \omega J_3$ auf dem Unterraum der Zustände mit festem E, j, ℓ und s gilt, wobei

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

der sog. Landé–Faktor ist. Wie lauten demnach die Energieeigenwerte?

(10 Punkte)

H2.2 *Zentralkraftfeld*

Ein Teilchen in einem Zentralpotential habe Bindungszustände $|n\ell m\rangle$ der Energie $E_{n\ell}$.

(1) Gib unter *alleiniger* Verwendung des Wigner/Eckart–Theorems die Beziehung zwischen den Matrixelementen $\langle n'\ell'm'| \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} |n\ell m\rangle$ und $\langle n'\ell'm'|z|n\ell m\rangle$ an.

(2) Unter welchen Bedingungen verschwinden die Matrixelemente nicht?

(3) Wiederhole die Diskussion mit Wellenfunktionen $\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$.

(4) Betrachte $M_{mn} = \langle n| \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} |m\rangle$ für konstantes $\vec{a}$, wobei $|m\rangle$ und $|n\rangle$ Coulombeigenfunktionen sind. Welche Multipolterme von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}$ können zu M_{mn} beitragen?

(10 Punkte)

H2.3 *Quadrupolmoment*

(1) Schreibe xy, xz, $x^2 - y^2$ als Komponenten eines sphärischen Tensors mit Rang 2.

(2) Der Erwartungswert $Q = e\langle jj|3z^2 - r^2|jj\rangle$ heißt *Quadrupolmoment*. Berechne $e\langle jm'|x^2 - y^2|jj\rangle$, ausgedrückt durch Q und Clebsch/Gordan–Koeffizienten.

(6 Punkte)

H2.4 *Weitere Operatoren beim Schwingermodell des Drehimpulses*

Beim Schwingermodell aus der Vorlesung betrachtet man zwei Paare Leiteroperatoren a, a^+ und b, b^+, die wechselseitig kommutieren. Dann erfüllen $J_+ = \hbar a^+ b$, $J_- = \hbar b^+ a$, $J_3 = \hbar(a^+ a - b^+ b)$ die Drehimpulsalgebra. Diskutiere die physikalische Bedeutung von $K_+ = a^+ b^+$ und $K_- = ab$. Welche Matrixelemente von $K_\pm$ verschwinden nicht?

(4 Punkte)