

## Anwesenheitsübungen IV

11. November bis 13. November

### A4.1 Spontane Emission

Befindet sich ein Atom nicht im Grundzustand, so zeigt das Experiment, daß es durch Abstrahlung von Licht in diesen übergeht. Allerdings ist ein Eigenzustand stabil und wir können im Rahmen der Störungstheorie nur die (durch ein externes elektromagnetisches Feld) stimulierte Emission erklären, die man sich im Laser zunutze macht. Zur Erklärung der spontanen Emission müssen einige Anleihen in der Quantenelektrodynamik gemacht werden, dort wird das elektromagnetische Feld quantisiert. Wir wählen die Coulombbeichung  $\text{div} \vec{A} = 0$ . Im Vakuum gilt daher  $\Phi = 0$  sowie  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$  und  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ . Für das Vektorpotential nehmen wir  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_+(\vec{r}, t) + \vec{A}_-(\vec{r}, t)$  mit

$$\vec{A}_+(\vec{r}, t) = \frac{c\sqrt{\hbar}}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \vec{e}(\vec{k}, \lambda) g_{\lambda}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)}, \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$$

an, wobei  $\vec{A}_- = \vec{A}_+^*$ , damit  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  reell wird.  $\vec{e}(\vec{k}, \lambda)$  sind die beiden Polarisationsvektoren, die in Coulombbeichung auf  $\vec{k}$  senkrecht stehen (warum?).  $g_{\lambda}(\vec{k})$  ist die Wellenzahlverteilung. Die Einführung der Normierung  $1/\sqrt{\omega_{\vec{k}}}$  wird später ersichtlich.

- (1) Wir interpretieren  $\vec{A}_+(\vec{r}, t)$  als Wellenpaket. Sei  $g_{\lambda}(\vec{k})$  scharf konzentriert um  $\vec{k}_0$ . Zeige, daß die Feldenergie durch  $H = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) = \hbar\omega_{\vec{k}_0}$  gegeben ist. Ein scharf konzentriertes Wellenpaket sieht man jedoch als Teilchen an, dieses Teilchen hat daher genau die Dispersionsrelation eines Photons.
- (2) Nun interpretiert man  $g_{\lambda}^*(\vec{k})$  als Vernichtungsoperator  $a_{\vec{k}, \lambda}$  und  $g_{\lambda}(\vec{k})$  als Erzeugungsoperator  $a_{\vec{k}, \lambda}^+$  eines Photons mit Impuls  $\vec{k}$  und Polarisation  $\lambda$ . Die Operatoren sollen die Vertauschungsrelationen des harmonischen Oszillators erfüllen, d.h.  $[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}$ ,  $[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}', \lambda'}] = [a_{\vec{k}, \lambda}^+, a_{\vec{k}', \lambda'}^+] = 0$ . Zeige, daß damit der Hamiltonoperator des Feldes  $H = \frac{\hbar}{2} \int d^3k \sum_{\lambda} \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}, \lambda}^+ a_{\vec{k}, \lambda} + a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}^+)$  lautet. Warum hat sich jetzt die Normierung  $1/\sqrt{\omega_{\vec{k}}}$  als nützlich erwiesen?
- (3) Leite die Wechselwirkung eines Teilchens mit dem elektromagnetischen Feld her:

$$H' = -\frac{q}{mc} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{p} + \frac{q^2}{2mc^2} |\vec{A}(\vec{r}, t)|^2 + q\Phi(\vec{r}, t).$$

Dabei ist die Identifikation  $\vec{j} = \frac{q}{m} \vec{p}$  nützlich, um Formeln der klassischen Elektrodynamik anwenden zu können. Der quadratische Term in  $\vec{A}$  enthält je zwei Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und beschreibt daher Prozesse wie die Comptonstreuung. Zur Emission von Photonen trägt nur der lineare Term bei.

- (4) Sei  $V(t) = F e^{-i\omega t} + F^+ e^{i\omega t}$  eine zeitabhängige Störung. Leite analog zur Ableitung der Goldenen Regel in der Vorlesung folgende Formel für die Übergangsrate, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit her:

$$w_{m \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} (\delta(E_n - E_m - \hbar\omega) |\langle n | F | m \rangle|^2 + \delta(E_n - E_m + \hbar\omega) |\langle n | F^+ | m \rangle|^2).$$

- (5) Betrachten wir nun die spontane Emission eines Photons mit Wellenzahl  $\vec{k}$  und Polarisation  $\lambda$  durch ein Atom, das dabei vom Zustand  $|m\rangle$  nach  $|n\rangle$  übergeht.

Das Strahlungsfeld geht dabei vom Grundzustand  $|0\rangle$  in den Ein-Photon-Zustand  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger|0\rangle$  über. Zeige mit Hilfe der Goldenen Regel bzw. (4) für die Übergangsrate:

$$w_{m \rightarrow n, \vec{k}, \lambda} = \frac{1}{2\pi |\vec{k}| c} \delta(E_m - E_n - \hbar \omega_{\vec{k}}) \left| \langle n | \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} | m \rangle \right|^2.$$

Folgere daraus die in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP_{m \rightarrow n, \vec{k}, \lambda}}{d\Omega} = \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2\pi c^3} \left| \langle n | \vec{j}(\vec{k}) \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* | m \rangle \right|^2,$$

wobei  $\vec{j}(\vec{k}) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$  und  $\vec{k}$  im Matrixelement  $|\vec{k}| = \frac{E_m - E_n}{\hbar c}$  erfüllen muß.

(6) Zeige, daß  $\vec{k}\vec{r} \ll 1$  gilt und daher die in  $\vec{j}(\vec{k})$  auftretende Exponentialreihe abgebrochen werden kann (Langwellennäherung; Theoretische Physik II, A8.2).

(7) Zeige für den ersten Term dieser Reihe, die elektrische Dipolstrahlung, daß

$$\frac{dP_{m \rightarrow n, \vec{k}, \lambda}}{d\Omega} = \frac{q^2 \omega_{\vec{k}}^4}{2\pi c^3} \left| \vec{d}_{nm} \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* \right|^2, \quad \text{wobei} \quad \vec{d}_{nm} = \langle n | \vec{r} | m \rangle.$$

Die totale Strahlungsleistung ergibt sich dann zu  $P_{m \rightarrow n} = \frac{4q^2 \omega_{\vec{k}}^4}{3c^3} |\vec{d}_{nm}|^2$ .

(8) Diskutiere, welche Übergänge möglich sind. Wie ist das Licht polarisiert?

## Hausaufgaben IV

Abgabe vom 18. November bis 20. November in den Übungen

Hinweis: In H4.1 und H4.2 werden die in A4.1 eingeführten Notationen verwendet.

### H4.1 Lebensdauer bei Dipolübergängen

(1) Zeige für die Wahrscheinlichkeit  $w_{m \rightarrow n}$  pro Zeiteinheit, daß ein Photon in den Raumwinkel  $d\Omega$  emittiert wird ( $\theta_{\vec{k}, \lambda}$  ist der Winkel zwischen  $\vec{e}(\vec{k}, \lambda)^*$  und  $\vec{d}_{nm}$ ):

$$\frac{dw_{m \rightarrow n, \vec{k}, \lambda}}{d\Omega} = \frac{q^2 \omega_{\vec{k}}^3}{2\pi c^3 \hbar} |\vec{d}_{nm}|^2 \cos^2 \theta_{\vec{k}, \lambda}.$$

(2) Zeige durch Summation über die Polarisation und Integration über den Winkel für die totale Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit:

$$w_{m \rightarrow n} = \frac{4q^2 \omega_{\vec{k}}^3}{3c^3 \hbar} |\vec{d}_{nm}|^2.$$

(3) Die Lebensdauer  $\tau$  eines Zustands  $|m\rangle$  hängt via  $\frac{1}{\tau} = \sum_n w_{m \rightarrow n}$  mit den Wahrscheinlichkeiten zusammen, wobei die Summe über alle erlaubten Endzustände  $|n\rangle$  läuft. Berechne so die Lebensdauer für den  $2p$ -Zustand des Wasserstoffs.

(15 Punkte)

### H4.2 Höhere Multipole

Der der elektrischen Dipolstrahlung folgende Term in der Langwellenentwicklung lautet

$$\langle n | -i(\vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* | m \rangle.$$

(1) Zeige, daß dieses Matrixelement wie folgt zerlegt werden kann:

$$-\underbrace{\frac{iq}{2m} \langle n | (\vec{k} \times \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^*) \cdot \vec{L} | m \rangle}_{\text{magnetischer Dipolübergang}} - \underbrace{\frac{q}{2} \frac{E_m - E_n}{\hbar} \langle n | (\vec{k} \cdot \vec{r}) (\vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* \cdot \vec{r}) | m \rangle}_{\text{elektrischer Quadrupolübergang}}.$$

(2) Diskutiere, welche Übergänge wann möglich sind. Um wieviel schwächer sind diese Übergänge im Vergleich zu elektrischen Dipolübergängen?

(15 Punkte)