Anwesenheitsübungen VI

25. November bis 27. November

A6.1 *Entwicklung der ebenen Welle nach Besselfunktionen*
Das Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\cdot\vec{y}} = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{i}^\ell j_\ell(|\vec{x}||\vec{y}\,|)\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|})Y_{\ell m}(\frac{\vec{y}}{|\vec{y}\,|}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{i}^\ell(2\ell+1)j_\ell(|\vec{x}||\vec{y}\,|)P_\ell(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}\,|}),$$

was die ebene Welle, d.h. die freie Teilchenbewegung, in Kugelkoordinaten darstellt. Dabei ist die sphärische Besselfunktion $j_\ell(kr)$ die am Ursprung reguläre Lösung der freien radialen Schrödingergleichung zum Drehimpuls ℓ und zur Energie $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$.

(1) Begründe die Entwicklung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}c_{\ell m}(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})j_\ell(|\vec{k}|r)Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$.

(2) Zeige $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\vartheta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}A_\ell j_\ell(kr)P_\ell(\cos\vartheta)$ für die Wahl $\vec{k} = k\vec{e}_z$.

(3) Die P_ℓ sind orthogonal. Folgere $A_\ell j_\ell(kr) = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}zP_\ell(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}krz}$.

(4) Zeige mit der Rodrigues–Formel: $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}zP_\ell(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}krz} = \frac{\mathrm{i}^\ell 2^{\ell+1}\ell!}{(2\ell+1)!}(kr)^\ell + \mathcal{O}((kr)^{\ell+1})$.

(5) Folgere aus der Asymptotik von $j_\ell(z)$ für $z\to 0$, daß $A_\ell = \mathrm{i}^\ell\sqrt{4\pi(2\ell+1)}$.

(6) Zeige schließlich mit dem Additionstheorem für die $Y_{\ell m}$ die allgemeine Formel.

A6.2 *Partialwellenentwicklung*
In der Vorlesung wurde die Streuamplitude nach Legendrepolynomen entwickelt:

$$f(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)f_\ell(k)P_\ell(\cos\vartheta),\quad f_\ell(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\ell(k)}-1) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell(k)}\sin\delta_\ell(k).$$

(1) Skizziere die Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vartheta)$ für reine $s-$ bzw. $p-$Wellenstreuung sowie für die Interferenz der beiden Terme.

(2) Skizziere die *Argand–Amplitude* $A_\ell = kf_\ell$ in der komplexen Ebene.

(3) Beschreibe den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} als Funktion der partiellen Wirkungsquerschnitte $\sigma_\ell = 4\pi(2\ell+1)\frac{1}{k^2}\sin^2\delta_\ell(k)$. Durch welche Funktion wird der Wirkungsquerschnitt begrenzt und wann wird diese Grenze angenommen?

(4) Wie lautet der Zusammenhang zwischen σ_{tot} und der Vorwärtsstreuamplitude?

Falls $\frac{u_\ell(r)}{r}$ Lösung der radialen Schrödingergleichung ist, so gilt für die Streuphase:

$$\sin\delta_\ell = -\frac{2mk}{\hbar^2}\int_0^\infty rV(r)u_\ell(r)j_\ell(kr)\mathrm{d}r\quad\text{mit}\quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Der Beweis dieser Formel benutzt die Asymptotik der Lösungen und verwendet die Wronski–Determinante (Theoretische Physik II, H4.3). Die erste Bornsche Näherung (äquivalent zum Ansatz in A5.1) erhält man durch Ersetzen der echten, aber i.a. nicht bekannten Lösung $u_\ell(r)$ durch die Lösung $rj_\ell(kr)$ der freien Schrödingergleichung.

(5) Es sei $kR \ll 1$. Berechne δ_0 und σ_0 für ein Kastenpotential $V(r) = V_0\Theta(R-r)$.

(6) Berechne die *Streulänge* $a = -\lim_{k\to 0}f_0(k)$ und drücke σ_0 durch a aus.

(7) Vergleiche die Streuphasen am repulsiven und attraktiven Potential. Wie verändert sich die Wellenfunktion gegenüber der freien $s-$Welle? Skizziere $r\psi(kr)$.

Hausaufgaben VI

Abgabe vom 2. Dezember bis 4. Dezember in den Übungen

H6.1 *Streuung an einer harten Kugel*

Für ein radialsymmetrisches Potential $V(r)$, das für $r > a$ verschwindet, läßt sich die Lösung der Schrödingergleichung für $r > a$ in der Form

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{i}^\ell (2\ell+1) A_\ell(r) P_\ell(\cos\vartheta)$$

schreiben, wobei die Radial-Wellenfunktion für $r > a$ gegeben ist durch

$$A_\ell(r) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell} \left(\cos\delta_\ell j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell n_\ell(kr)\right),$$

so daß ohne Potential $A_\ell(r) = j_\ell(kr)$ gilt. Dabei nennt man $j_\ell(z) = (-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\partial_z\right)^\ell \frac{\sin z}{z}$ sphärische Bessel- und $n_\ell(z) = -(-z)^\ell \left(\frac{1}{z}\partial_z\right)^\ell \frac{\cos z}{z}$ sphärische Neumann-Funktionen. Betrachte das Problem der Streuung an einer unendlich harten Kugel vom Radius a.

(1) Leite aus der Bedingung $A_\ell(a) = 0$ eine Formel für $\tan\delta_\ell$ ab.

(2) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} in den Grenzfällen niedriger Energien ($ka \ll 1$) bzw. hoher Energien ($ka \gg 1$)? Nutze dabei das asymptotische Verhalten der j_ℓ und n_ℓ aus, um für $ka \ll 1$ zu zeigen, daß die Summe durch den Beitrag der $s-$Welle dominiert wird. Breche für $ka \gg 1$ die Summe bei $\ell_{\max} \approx ka$ ab. Das asymptotische Verhalten ist mit $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$:

$$\lim_{z\to 0}: \quad j_\ell(z) \sim \frac{z^\ell}{(2\ell+1)!!} \qquad n_\ell(z) \sim -\frac{(2\ell-1)!!}{z^{\ell+1}}$$

$$\lim_{z\to\infty}: \quad j_\ell(z) \sim \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right) \qquad n_\ell(z) \sim -\frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

(3) Vergleiche die Ergebnisse mit dem, was man klassisch erwarten würde.

(10 Punkte)

H6.2 *Resonanzstreuung an einer idealisierten Kugelschale*

Betrachte, mit den Bezeichnungen aus H6.1, das Potential $V(r) = \lambda\frac{\hbar^2}{2m}\delta(r-a)$.

(1) Verwende die Anschlußbedingungen bei $r = a$, um eine Gleichung für $\tan\delta_\ell$ herzuleiten, die die Streuphasen festlegt. Setze für $r < a$ dabei $A_\ell(r) \sim j_\ell(kr)$ an und begründe, warum die $n_\ell(kr)$ für $r < a$ nicht auftreten. Zeige, daß der Limes $\lambda \to \infty$ auf den Ausdruck für die Streuung an einer unendlich harten Kugel führt.

(2) Beschränke die weiteren Untersuchungen auf $s-$Wellen–Streuung im Limes kleiner Energien, d.h. $\lambda a \gg ka$. Die Energie der Streuteilchen ist $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Zeige, daß in diesem Grenzfall für bestimmte Energien Resonanz auftritt. In diesem Grenzfall ist $|\tan ka| \ll 1$, und Resonanz tritt ein, wenn $\cot\delta_0$ verschwindet.

(3) Entwickle die Streuamplitude $f_0 = \frac{1}{k\cot\delta_0 - \mathrm{i}k}$ um die Resonanzenergie E_{res} und drücke das Ergebnis durch die *Resonanzbreite* $\Gamma = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\cot\delta_0|_{E=E_{\mathrm{res}}}}$ aus.

(4) Gib den Wirkungsquerschnitt an. Wie verhält sich die Resonanz für $\lambda \to \infty$?

(20 Punkte)