Klausur

8. Februar 2003

 # 1 *Zur Drehimpulsaddition* (15 Punkte)

Führe die Drehimpulsaddition für $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ explizit durch, indem ausgehend von den Zuständen $|\frac{1}{2}, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle$ die Wirkung der Leiteroperatoren verwendet wird.

 # 2 *Zum Wigner/Eckart–Theorem* (4+6+5+3=18 Punkte)

(1) Was ist ein sphärischer Tensoroperator vom Rang r? Gib ein Beispiel ($r = 1$) an.

(2) Formuliere die Aussage des Wigner/Eckart–Theorems und erläutere sie kurz.

(3) Welcher Operator ist für elektrische Dipolübergänge im Atom verantwortlich? Zeige, welche Werte für $\Delta\ell$ aufgrund des Wigner/Eckart–Theorems möglich sind.

(4) Leite eine weitere Einschränkung an $\Delta\ell$ aus der Invarianz unter der Parität her.

 # 3 *Hyperfeinstruktur* (4+6+8+2+6+5=31 Punkte)

Die Hyperfein–Wechselwirkung im Wasserstoffatom ist durch den Hamiltonoperator

$$H' = \underbrace{-8\pi\mu_e\mu_p\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{S}_e \cdot \vec{S}_p}_{H_{\mathrm{HF}}} + 2\,\frac{\mu_e\mu_p}{r^3}(\vec{S}_e \cdot \vec{S}_p - \frac{3}{r^2}(\vec{r} \cdot \vec{S}_e)(\vec{r} \cdot \vec{S}_p))$$

gegeben, wobei $\mu_{e,p}$ die gyromagnetischen Verhältnisse von Elektron bzw. Proton, $\vec{S}_{e,p}$ ihre Spins und $\vec{r}$ den Relativabstand bezeichnet. Diese Wechselwirkungen koppeln den Elektronendrehimpuls $\vec{J}$ mit dem Protonspin zu $\vec{F} = \vec{J} + \vec{S}_p = \vec{L} + \vec{S}_e + \vec{S}_p$.

(1) Wieso sind die Zustände des vollen Hamiltonoperators durch Quantenzahlen ℓ, j, f, m_f gegeben, wobei $\hbar^2 f(f+1)$ der Eigenwert von $\vec{F}^2$ und $\hbar m_f$ der von F_3 ist?

(2) Zeige mit Hilfe des Projektionstheorems, daß

$$\langle \ell j f m_f | \vec{S}_e | \ell j f m_f \rangle = \frac{1}{2j(j+1)}(j(j+1) + \frac{3}{4} - \ell(\ell+1))\langle \ell j f m_f | \vec{J} | \ell j f m_f \rangle.$$

(3) Berechne die Energieverschiebung durch H_{HF} in 1. Ordnung Störungstheorie.

(4) Welche Zustände werden durch H_{HF} in dieser Näherung energetisch aufgespalten?

(5) Welche Werte für f sind möglich? Welcher von ihnen liegt energetisch tiefer?

(6) Zeige durch Symmetriebetrachtungen, daß der zweite Term in H' in 1. Ordnung Störungstheorie für S–Zustände nicht beiträgt.

 # 4 *Zur Streutheorie* (3+9+12+2=26 Punkte)

(1) Wie lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung an einem Potential $V(\vec{r})$ in Bornscher Näherung?

(2) $V(\vec{r})$ sei das Coulombpotential der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,')$. Zeige

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{32\pi^3 m^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^4}|(\mathcal{F}\varrho)(\vec{q})|^2$$

in Bornscher Näherung ($\mathcal{F}$ Fouriertransformation). Was liefert eine Punktladung?

(3) Ein Teilchen der Masse m wird an einem kugelsymmetrischen Kastenpotential $V(r) = V_0\Theta(R - r)$ gestreut. Wir betrachten nur S–Wellen–Streuung. Berechne die Streuphase $\delta_{\ell=0}(k)$ durch Lösen der Schrödingergleichung exakt.

(4) Gib Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt für (3) an.

 # 5 *Zur Vielteilchentheorie* (3+4+6=13 Punkte)

(1) Gib die Wellenfunktion für ein System N gleichartiger, nichtwechselwirkender Fermionen mit Einteilchenzuständen $|\psi_i\rangle$ explizit an.

(2) Welche algebraischen Relationen erfüllen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen? Wie lautet der Besetzungszahloperator?

(3) Betrachte ein Vielteilchensystem mit Dispersionsrelation $\varepsilon(\vec{p})$ und einer Zweiteilchenwechselwirkung V, d.h. V hängt nur vom Relativabstand der Teilchen ab. Gib den Hamiltonoperator an, geschrieben mit Erzeugern und Vernichtern.

6 *Zur Quantenstatistik* (3+6=9 Punkte)

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ befindet sich, unter dem Einfluß eines konstanten Magnetfeldes $\vec{B}$, im thermodynamischen Gleichgewicht mit der absoluten Temperatur T.

(1) Wie lautet der statistische Operator ϱ, der die Wechselwirkung mit $\vec{B}$ beschreibt?

(2) Berechne den Erwartungswert von S_3, wobei $\vec{B}$ in 3–Richtung zeigen möge.

7 *Fragen zur relativistischen Quantenmechanik* (2+4+4+8+4+6+14+3=45 Punkte)

(1) Wie lautet die freie Klein/Gordon–Gleichung? Wieso ist sie lorentzinvariant?

(2) Welche Algebra erfüllen die $\gamma-$Matrizen? Zeige, daß $\operatorname{Spur}\gamma^\mu = 0$.

(3) Wie lauten die beiden inäquivalenten Darstellungen der Lorentzgruppe zu Spin $\frac{1}{2}$ auf zweikomponentigen Spinoren?

(4) Folgere aus der Lorentzkovarianz der Diracgleichung: $\psi'(x') = S\psi(x)$ und die Eigenschaften der Matrix S. Wie lautet S in Weyldarstellung explizit?

(5) Gib die Pauligleichung an. Was folgt für die Energie eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld?

(6) Wie lautet der Paritätsoperator für die Diracgleichung? Begründe die Antwort.

(7) Gib den Dirac–Skalar und den Dirac–Axialvektorstrom an. Zeige, wie sich diese unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen und der Parität verhalten.

(8) Skizziere die Energieniveaus für die Lösung der Diracgleichung für das H–Atom. Welche Entartung wird erst durch den Lambshift aufgehoben?

8 *Eichinvarianz der Diracgleichung* (8 Punkte)

Betrachte ein geladenes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem elektromagnetischen Potential $A^\mu(x)$. Zeige, wie sich der Dirac–Spinor des Teilchens bei einer Eichtransformation $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x)$ transformieren muß, damit weiter die Diracgleichung gilt.

9 *Elektron im konstanten Magnetfeld* (9+9+10+4+3=35 Punkte)

Betrachte ein Elektron ($q{=}{-e}$) im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Wähle $\vec{A} = Bx\vec{e}_y$ und die γ^μ in Standarddarstellung. Wir suchen stationäre Zustände zur Energie E.

(1) Setze $\psi(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\binom{\xi(\vec{r})}{\eta(\vec{r})}$ an und zeige

$$\left(-\hbar^2\Delta + \frac{e^2}{c^2}B^2x^2 + \frac{e}{c}B\left(\hbar\sigma_z + 2x\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\xi(\vec{r}) = \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right)\xi(\vec{r}).$$

(2) Wieso kann man $\xi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p_y y + p_z z)}f(x)$ ansetzen? Zeige mit $w = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\left(x + \frac{p_y c}{eB}\right)$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}w^2} + w^2 + \sigma_z\right)f(w) = \frac{c}{eB\hbar}\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - p_z^2\right)f(w).$$

(3) Wieso kann man $f(w) = \binom{f_+(w)}{0}$ bzw. $\binom{0}{f_-(w)}$ als Lösung ansetzen? Auf welches Problem wird damit die Lösung zurückgeführt? Zeige für die Energieeigenwerte, daß $E^2 = m^2c^4 + p_z^2c^2 + eB\hbar c(2n+1\pm 1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und interpretiere sie.

(4) Zeige

$$\eta(\vec{r}) = \frac{1}{\frac{E}{c} + mc}\left(\pm p_z + \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\left(ew\sigma_y - \mathrm{i}\sigma_x\frac{\partial}{\partial w}\right)\right)\xi(\vec{r}).$$

(5) Die Gleichung für E in (3) ist quadratisch. Diskutiere die Konsequenzen daraus.

Viel Erfolg!