Nachklausur

21. März 2003

 # 1 *Zur Drehimpulsaddition* (18 Punkte)

Führe die Drehimpulsaddition für $j_1 = 1$, $j_2 = \frac{1}{2}$ explizit durch, indem ausgehend von den Zuständen $|1, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle$ die Wirkung der Leiteroperatoren verwendet wird.

 # 2 *Zum Wigner/Eckart–Theorem* (4+6+5+3=18 Punkte)

(1) Was ist ein sphärischer Tensoroperator vom Rang r? Gib ein Beispiel ($r = 1$) an.

(2) Formuliere die Aussage des Wigner/Eckart–Theorems und erläutere sie kurz.

(3) Welcher Operator ist für magnetische Dipolübergänge im Atom verantwortlich? Zeige, welche Werte für $\Delta\ell$ aufgrund des Wigner/Eckart–Theorems möglich sind.

(4) Leite eine weitere Einschränkung an $\Delta\ell$ aus der Invarianz unter der Parität her.

 # 3 *Landé–Faktor* (5+2+10+2=19 Punkte)

Betrachte ein Atom in einem räumlich homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$. Das Feld sei so schwach, daß der Hamiltonoperator für die Störung durch $H' = \omega(L_3 + 2S_3)$ gegeben ist, wobei $\omega = \frac{eB}{2mc}$ die Larmorfrequenz bezeichnet.

(1) Der Hamiltonoperator H des Atoms enthalte noch Spin/Bahn–Kopplung. Warum sind dann H, $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$, J_3 ein vollständiger Satz kommutierender Observablen?

(2) Warum hat ein Energieniveau mindestens $2j + 1$ als Entartungsgrad?

(3) Zeige mit dem Projektionstheorem, daß $H' = g_L\omega J_3$ auf dem Unterraum der Zustände mit festem E, j, ℓ und s gilt und berechne den Landé–Faktor g_L.

(4) Wie lauten die Energieeigenwerte von $H + H'$, des vollen Hamiltonoperators?

 # 4 *Zur Streutheorie* (3+10+13+2=28 Punkte)

(1) Wie lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung an einem Potential $V(\vec{r})$ in Bornscher Näherung?

(2) Führe für ein radialsymmetrisches Potential die Winkelintegration in (1) aus und berechne $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für einen kugelsymmetrischen Potentialtopf (Tiefe V_0, Radius r_0).

(3) Ein Teilchen der Masse m wird an einer idealisierten (d.h. unendlich dünnen) Kugelschale $V(r) = V_0\delta(R-r)$ gestreut. Wir betrachten nur S–Wellen–Streuung. Berechne die Streuphase $\delta_{\ell=0}(k)$ durch Lösen der Schrödingergleichung exakt.

(4) Gib die Streuamplitude und den differentiellen Wirkungsquerschnitt für (3) an.

 # 5 *Zur Vielteilchentheorie* (8+6=14 Punkte)

(1) Welche Relationen erfüllen fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren? Gib den Besetzungszahloperator an. Zeige, welche Eigenwerte möglich sind.

(2) Betrachte ein Vielteilchensystem mit Dispersionsrelation $\varepsilon(\vec{p})$ und einer Zweiteilchenwechselwirkung V, d.h. V hängt nur vom Relativabstand der Teilchen ab. Gib den Hamiltonoperator an, geschrieben mit Erzeugern und Vernichtern.

 # 6 *Fragen zur relativistischen Quantenmechanik* (5+7+8+7+4+6+13+3=53 Punkte)

(1) Welche Algebra erfüllen die γ–Matrizen? Zeige allgemein, daß $\mathrm{Spur}\,\gamma^\mu = 0$. Welche γ^μ sind in der Standarddarstellung hermitesch bzw. antihermitesch?

(2) Gib die Überlagerungsabbildung für die Lorentzgruppe an. Wie lauten ihre beiden inäquivalenten Darstellungen zu Spin $\frac{1}{2}$ auf zweikomponentigen Spinoren?

(3) Folgere aus der Lorentzkovarianz der Diracgleichung: $\psi'(x') = S\psi(x)$ und die Eigenschaften der Matrix S. Wie lautet S in Weyldarstellung explizit?

(4) Wie lauten die beiden Weylgleichungen? Zeige, welche Teilchen durch diese in sehr guter Näherung beschrieben werden.
(5) Gib die Pauligleichung an. Was folgt für die Energie eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld?
(6) Wie lautet der Paritätsoperator für die Diracgleichung? Begründe die Antwort.
(7) Gib den Dirac–Pseudoskalar und den Dirac–Vektorstrom an. Zeige, wie sich diese unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen und der Parität verhalten.
(8) Skizziere die Energieniveaus für die Lösung der Diracgleichung für das H–Atom. Welche Entartung wird erst durch den Lambshift aufgehoben?

7 *Eichinvarianz der Diracgleichung* (8 Punkte)

Betrachte ein geladenes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem elektromagnetischen Potential $A^\mu(x)$. Zeige, wie sich der Dirac–Spinor des Teilchens bei einer Eichtransformation $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x)$ transformieren muß, damit weiter die Diracgleichung gilt.

8 *Teilchen im Lichtpuls* (2+6+4+3+4+11+5+5+2=42 Punkte)

Betrachte ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m in einem elektromagnetischen Viererpotential $A_0 = A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = \phi(x^1 - x^0)$. Wir setzen $u := x^1 - x^0$.

(1) Wieso kann man $\psi(x) = \psi_0(u)\exp(\mathrm{i}(k_+(x^1 + x^0) + k_2 x^2 + k_3 x^3))$ ansetzen?
(2) Bringe die Diracgleichung mit dem Ansatz (1) auf die Form ($\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$, $\beta = \gamma^0$):

$$-\mathrm{i}(1-\alpha^1)\frac{\partial \psi_0}{\partial u} - k_+(1+\alpha^1)\psi_0 = \left(\alpha^2\left(k_2 - \frac{q}{\hbar c}\phi(u)\right) + \alpha^3 k_3 + \beta\frac{mc}{\hbar}\right)\psi_0.$$

(3) Wieso kann man für die Matrizen α^k und β folgende Form wählen?

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Zeige mit (3) und der Zerlegung $\psi_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ in zweikomponentige Spinoren:

$$-2\mathrm{i}\frac{\partial \eta}{\partial u} = \lambda \xi \quad \text{und} \quad -2k_+\xi = \lambda\eta, \quad \text{wobei} \quad \lambda = \sigma^1\left(k_2 - \frac{q}{\hbar c}\phi(u)\right) + \sigma^2 k_3 + \sigma^3\frac{mc}{\hbar}.$$

(5) Zeige, daß

$$\eta(u) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4k_+}\left(\left(k_3^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)u + \int_0^u \mathrm{d}u'\left(k_2 - \frac{q}{\hbar c}\phi(u')\right)^2\right)\right)\chi$$

eine Lösung von (4) ist, wobei χ ein 2–Spinor ist, der noch von k_+, k_2, k_3 abhängt.
(6) Für $\phi = 0$ erhält man natürlich einen freien Spinor $\psi_{\vec{k}}$ mit Wellenvektor $\vec{k}$. Zeige

$$k_1 = k_+ - \frac{1}{4k_+}\left(k_2^2 + k_3^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \quad \text{und} \quad k_0 = k_+ + \frac{1}{4k_+}\left(k_2^2 + k_3^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)$$

und verifiziere, daß der Vierervektor k auf der Massenschale liegt. Wie hängt das Vorzeichen von k_0 von k_+, k_2 und k_3 ab? Was geschieht für $k_+ = 0$?
(7) Sei $\phi(u) = 0$ für große negative u und $\phi(u) = a = \text{const.}$ für große positive u. Wieso entspricht solch ein ϕ einem Lichtpuls? Für große negative u gilt dann offenbar $\psi(u) = \psi_{\vec{k}}$. Zeige für positive u: $\psi(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}ax^2}\psi_{\vec{k}'}$, mit $\vec{k}' = \vec{k} - \frac{q}{\hbar c}a\vec{e}_2$.
(8) Interpretiere den Phasenfaktor und die Impulsänderung in (7).
(9) Können durch solch einen Puls Teilchen erzeugt werden? Begründe die Antwort.

Viel Erfolg!