

DAS WICK THEOREM

In der Vorlesung haben wir angefangen, eine störungstheoretische Sichtweise der Quantenfeldtheorie zu entwickeln. Dabei gingen wir in das Wechselwirkungsbild über, bei dem die Wechselwirkung zwischen Feldern stattfindet, die die Modenentwicklungen und Vertauschungsrelationen freier Felder besitzen. Die Wechselwirkung findet, ganz ähnlich zur Dyson-Reihe in der Störungstheorie, punktweise statt, zwischen den einzelnen Wechselwirkungspunkten, den *Vertices*, propagieren die Felder frei, so dass für diese Wege die freien Propagatoren verwendet werden können. Allerdings wird am Schluß über alle möglichen Raumzeitpunkte, an denen Wechselwirkungen stattfinden können, integriert.

In der Quantenelektrodynamik (QED) ist die Wechselwirkung durch die einfache aber typische Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_I(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x):$ gegeben. Da diese keine Ableitungen enthält, ist damit die Hamilton-Dichte einfach gegeben als $\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x)$. In der Vorlesung hatten wir dann gezeigt, dass der Übergang von asymptotisch freien Anfangszuständen bei $t = -\infty$ zu ebenfalls asymptotisch freien Zuständen bei $t = +\infty$ durch die Streumatrix (oder einfach S -Matrix) $S = U_I(\infty, -\infty)$ beschrieben wird, die die Entwicklung

$$S = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x^{(1)} \int d^4x^{(2)} \dots \int d^4x^{(n)} \mathcal{T} \left(\mathcal{H}_I(x^{(1)}) \mathcal{H}_I(x^{(2)}) \dots \mathcal{H}_I(x^{(n)}) \right)$$

besitzt. Folgende Punkte sind nun zu beachten: Die Wechselwirkung wird ausgedrückt durch eine Reihe, in der die Wechselwirkung durch punktweise Wechselwirkungen approximiert wird. Die n -te Ordnung der Reihe ist eine Approximation durch n Vertices. Diese müssen, um physikalisch sinnvoll zu sein, in zeitgeordneter Reihenfolge stehen, daher der Zeitordnungsoperator \mathcal{T} . Weiter ist die Wechselwirkung in n -ter Ordnung durch das n -fache Produkt der Wechselwirkungs-Hamilton-Dichte gegeben. Jeder Faktor, d.h. jede einzelne Hamilton-Dichte, ist hingegen normalgeordnet, um irrelevante aber divergente Nullpunktsenergie zu eliminieren. Diese treten übrigens typischerweise immer dann auf, wenn Produkte von Feldoperatoren an identischen Punkten genommen werden, wie dies bei $\mathcal{L}_I(x)$ ja der Fall ist. Physikalisch ist man an den Übergangsamplituden $S_{fi} = \langle f|S|i \rangle$ interessiert, insbesondere an den Vakuum Erwartungswerten $\langle 0|S|0 \rangle$ oder allgemeiner $\langle 0|\mathcal{T} \left(\prod_i \Phi_i^{(+)}(x^{(i)}) \right) S \mathcal{T} \left(\prod_j \Phi_j^{(-)}(x^{(j)}) \right) |0 \rangle$. In letzterem Ausdruck haben wir explizit eine Reihe von Teilchen erzeugt bzw. vernichtet, die jeweils den Initial- bzw. Finalzustand darstellen sollen.

Zwei einfache Fälle kennen wir bereits aus der Quantenfeldtheorie freier Felder: Erstens verschwinden Vakuum Erwartungswerte beliebiger normalgeordneter Produkte, $\langle 0|\prod_i \Phi_i(x^{(i)})|0 \rangle = 0$. Hierbei und im folgenden bezeichnet $\Phi_i(x^{(i)})$ nicht weiter spezifizierte Feldoperatoren. Zweitens kennen wir die Vakuum Erwartungswerte zweier gleichartiger Feldoperatoren, die zeitgeordnet sind, $\langle 0|\mathcal{T}(\Phi_i(x)\Phi_j(y))|0 \rangle = D_{F,ij}(x-y)$, wobei $D_{F,ij}(x)$ der Feynmann-Propagator für ein Paar Felder vom Typ i und j ist. Zur Erinnerung: $\langle 0|\mathcal{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = S_F(x-y)$, $\langle 0|\mathcal{T}\psi(x)\psi(y)|0 \rangle = \langle 0|\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = \langle 0|\mathcal{T}\psi(x)A^\mu(y)|0 \rangle = 0$ und $\langle 0|\mathcal{T}A^\mu(x)A^\nu(y)|0 \rangle = \mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x-y)$ mit

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x) = -\eta^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon}.$$

Wir müssen nun herausfinden, wie die Erwartungswerte von zeitgeordneten Produkten aussehen, deren Faktoren normalgeordnete Produkte sind. Dies wird auf elegante Weise genau durch das *Wick-Theorem* geleistet.

Kontraktionen. Bevor wir das Wicksche Theorem angeben, müssen wir noch den Begriff der *Kontraktion* zweier Felder einführen. Es sei zunächst $x^0 > y^0$ angenommen. Dann ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\Phi_i(x)\Phi_j(y) &= \Phi_i^{(+)}(x)\Phi_j^{(+)}(y) + \Phi_i^{(+)}(x)\Phi_j^{(-)}(y) + \Phi_i^{(-)}(x)\Phi_j^{(+)}(y) + \Phi_i^{(-)}(x)\Phi_j^{(-)}(y) \\ &= \Phi_i^{(+)}(x)\Phi_j^{(+)}(y) \pm \Phi_j^{(-)}(y)\Phi_i^{(+)}(x) + \Phi_i^{(-)}(x)\Phi_j^{(+)}(y) + \Phi_i^{(-)}(x)\Phi_j^{(-)}(y) \\ &+ [\Phi_i^{(+)}(x), \Phi_j^{(-)}(y)]_{\mp}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass in der letzten Gleichung alle Terme außer dem Kommutator normalgeordnet sind. Hätten wir anfangs $x^0 < y^0$ gehabt, so wäre aufgrund der Zeitordnung das Resultat das selbe bis auf den Kommutator, für den wir nun $\pm[\Phi_j^{(+)}(y), \Phi_i^{(-)}(x)]_{\mp}$ erhalten hätten. Wir können beide Fälle zusammenfassen, indem wir die Kontraktion

$$\underbrace{\Phi_i(x)\Phi_j(y)} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} [\Phi_i^{(+)}(x), \Phi_j^{(-)}(y)]_{\mp} & \text{wenn } x^0 > y^0 \\ \pm[\Phi_j^{(+)}(y), \Phi_i^{(-)}(x)]_{\mp} & \text{wenn } y^0 > x^0 \end{array} \right\} = D_{F,ij}(x-y)$$

definieren. In verschiedenen Büchern wird die waagrechte Klammer auch über den Feldern gezeichnet. Der entscheidende Punkt ist, dass die Kontraktion gerade den Kommutator ergibt, der für die korrekte Normalordnung des zeitgeordneten Produktes notwendig ist, und dass dieser so gewählte Kommutator für die entsprechende Ordnung der Zeiten x^0 und y^0 genau identisch mit dem Feynmann-Propagator ist. Damit erhalten wir für zwei Felder den folgenden Zusammenhang zwischen Zeitordnung und Normalordnung:

$$\mathcal{T}(\Phi_i(x)\Phi_j(y)) = :\Phi_i(x)\Phi_j(y) + \underbrace{\Phi_i(x)\Phi_j(y)}: . \quad (*)$$

Da die Normalordnung linear und additiv ist, können wir in diesem Fall die Kontraktion einfach auch außerhalb der Normalordnung schreiben. Nimmt man Vakuumerwartungswerte, so überlebt nur die Kontraktion, die den Propagator liefert, also ein c -Zahl. Ein typisches Merkmal freier Felder ist, dass Kommutatoren und damit Propagatoren reine Funktionen sind, keine Operatoren. Sind die Vertauschungsrelationen c -Zahlen, so ist es auch die Kontraktion, da sich sowohl Zeitordnung wie Normalordnung zweier Felder höchstens durch einen Kommutator von dem reinen, ungeordneten, Produkt der Felder unterscheidet. Offensichtlich ist daher die Differenz von Zeitordnung und Normalordnung, also die Kontraktion gemäß (*), höchstens durch Kommutatoren gegeben, also eine c -Zahl. Unsere obige Definition der Kontraktion ist so angelegt, dass bei Fermionen die korrekten Vorzeichen auftreten. Es gilt weiter $\underbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = S_F(x-y)$, $\underbrace{\psi(x)\psi(y)} = \underbrace{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0$ und entsprechend für die anderen möglichen Kontraktionen. Damit haben wir alle notwendigen Definitionen zusammen, um das Wicksche Theorem hinschreiben zu können.

Wicksche Theorem. Zunächst behandeln wir den Fall, dass das zeitgeordnete Produkt von einfachen Feldern, also nicht von normalgeordneten Produkten von Feldern an gleichen Punkten der Raumzeit, genommen wird. Dann lautet das Theorem einfach

$$\mathcal{T}(\Phi_{i_1}(x^{(1)})\Phi_{i_2}(x^{(2)})\dots\Phi_{i_n}(x^{(n)})) = :(\Phi_{i_1}(x^{(1)})\Phi_{i_2}(x^{(2)})\dots\Phi_{i_n}(x^{(n)}) + (\text{alle Kontraktionen})) : . \quad (**)$$

Die Phrase *alle Kontraktionen* besagt, dass sämtliche möglichen Kontraktionen zwischen den Feldern zu nehmen sind, und zwar sowohl einfache bis maximal mehrfache. Man hat also einen Term für jede mögliche Art, die n Felder in Paaren zu kontrahieren. Für $n = 2$ ist dies identisch zu (*). Es ist illustrativ, sich einmal den Fall $n = 4$ anzusehen. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir $\phi_k = \Phi_{i_k}(x^{(k)})$. Dann ergibt das Wicksche Theorem

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = & :(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ & + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}): . \end{aligned}$$

Man beachte die drei Terme, wo die vier Felder zu je zwei Paaren kontrahiert werden. Dies sind die einzigen Terme, die in einem Vakuumerwartungswert beitragen könnten. Hierbei ist zu beachten, dass die Kontraktion nicht zueinander benachbarter Felder nach wie vor den Propagator ergibt. Bei fermionischen Feldern tritt hierbei ein Vorzeichen auf, wann immer zwei Fermionen vertauscht werden. Insgesamt wird das Vorzeichen dadurch gegeben, an wievielen anderen Fermionen man ein Feld vorbeitauschen müsste, um es neben das Feld zu bekommen, mit dem es kontrahiert wird. So ist z.B. für Bosonen

$$:\underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}: = D_F(x^{(1)} - x^{(3)}) :(\phi_2\phi_4): ,$$

während bei fermionischen Feldern ein Vorzeichen auftritt. Es ist daher praktischer, die Kontraktionen anzugeben, anstatt die Propagatoren auszuschreiben, da man dann ggfls. noch Vorzeichen anbringen muss. Genauer gilt mit $\Psi_i \in \{\psi_i, \bar{\psi}_i\}$ als Abkürzung

$$\begin{aligned} :(\Psi_1 \dots \Psi_{k-1} \underbrace{\psi_k \Psi_{k+1} \dots \Psi_{l-1} \bar{\psi}_l \Psi_{l+1} \dots \Psi_n}): & = (-1)^{l-k-1} S_F(x^{(k)} - x^{(l)}) \\ & \times :(\Psi_1 \dots \Psi_{k-1} \Psi_{k+1} \dots \Psi_{l-1} \Psi_{l+1} \dots \Psi_n): , \end{aligned}$$

Beweis. Das Wicksche Theorem wird durch Induktion bewiesen. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 2$, gegeben durch (*), für den es nichts mehr zu zeigen gibt. Die Induktionsannahme ist, dass das Theorem für $n - 1$ gültig ist. Der Einfachheit halber können wir weiter annehmen, dass die Felder in (**) schon zeitgeordnet sind, d.h. $x^{(1)0} > x^{(2)0} > \dots > x^{(n)0}$, da wir sonst die Punkte in (**) auch einfach umbenennen könnten, ohne dass sich die Gleichung ändert. Es gilt dann offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\phi_1 \dots \phi_n) & = \phi_1 \dots \phi_n \\ & = \phi_1 :(\phi_2 \dots \phi_n + (\text{alle Kontraktionen ohne } \phi_1)): \quad \text{wegen Induktionsannahme} \\ & = (\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)}) (\phi_2 \dots \phi_n + (\text{alle Kontraktionen ohne } \phi_1)): . \end{aligned}$$

Wir müssen nun nur noch den Vernichter $\phi_1^{(+)}$ und den Erzeuger $\phi_1^{(-)}$ in das normalgeordnete Produkt ziehen. Für den Erzeuger ist das trivial, da der sowieso schon normalgeordnet dasteht. Für den Vernichter betrachten wir als Beispiel den Term, der gar keine Kontraktionen enthält, und zwar hier zunächst nur im Fall bosonischer Felder, um nicht mühsam auf Vorzeichen achten zu müssen:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(+)} :(\phi_2 \dots \phi_n): &= :(\phi_2 \dots \phi_n): \phi_1^{(+)} + \left[\phi_1^{(+)} ; :(\phi_2 \dots \phi_n): \right] \\ &= :(\phi_1^{(+)} \phi_2 \dots \phi_n): + :([\phi_1^{(+)} ; \phi_2^{(-)}] \phi_3 \dots \phi_n + \phi_2 [\phi_1^{(+)} ; \phi_3^{(-)}] \phi_4 \dots \phi_n + \dots): \\ &= :(\phi_1^{(+)} \phi_2 \dots \phi_n + \underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n} + \underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \dots \phi_n} + \dots): . \end{aligned}$$

Der erste Term der letzten Zeile kombiniert sich mit dem $\phi_1^{(-)}$ -Anteil zum vollständigen normalgeordneten Produkt $:(\phi_1 \dots \phi_n):$. Wir haben damit den ersten Term in Wick's Theorem sowie alle Terme mit genau einer Kontraktion erhalten, die das Feld ϕ_1 involviert. Hätten wir die Terme betrachtet, in denen schon genau eine Kontraktion zwischen Feldern ϕ_i und ϕ_j mit $i, j \in \{2, \dots, n\}$ vorkommt, so hätten wir alle Terme des Wickschen Theorem für n Felder erhalten, in denen entweder eine Kontraktion ohne ϕ_1 vorkommt, oder zwei Kontraktionen, von denen eine das Feld ϕ_1 enthielte. Entsprechend gibt allgemein die Menge der Terme mit k Kontraktionen unter den Feldern ϕ_2, \dots, ϕ_n aus der Induktionsannahme alle Kontraktionen der Felder ϕ_1, \dots, ϕ_n , die entweder k -fache Kontraktionen ohne das Feld ϕ_1 sind, oder $(k + 1)$ -fache Kontraktionen mit dem Feld ϕ_1 . Damit folgt die Induktionsbehauptung. Bei fermionischen Feldern muss man beim Einsetzen der Kommutatoren noch Vorzeichen einführen, wenn Felder miteinander vertauscht werden müssen, um sie in die richtige Reihenfolge zu bekommen. Ansonsten ändert dies am Beweis aber nichts.

SPUREN VON γ -MATRIZEN

Beim Berechnen von Feynmann-Diagrammen mit externen Fermionen-Linien ist der häufigste Fall der, dass sowohl die einlaufenden Fermionen in ihren Spins unpolarisiert sind, als auch bei der Messung der auslaufenden Fermionen nicht auf die Polarisation der Spins geachtet wird. Man mittelt daher über sämtliche Spinrichtungen. Weiter müssen von den Amplituden, um Übergangswahrscheinlichkeiten zu ergeben, noch die Betragsquadrate genommen werden. Es gilt dann folgedner allgemeiner Sachverhalt: Die Übergangswahrscheinlichkeiten von Diagrammen mit externen Fermionenlinien lassen sich in der Spin-Mittlung immer umformen in Ausdrücke, die Spuren über Produkte von γ -Matrizen sind. Dazu nutzt man insbesondere die Vollständigkeitsrelationen der Spinoren,

$$\sum_r u_r(p) \bar{u}_r(p) = \not{p} + m, \quad \sum_r w_r(p) \bar{w}_r(p) = \not{p} - m.$$

Eine typische Amplitude bei der Streuung zweier Fermionen (also vier externe Fermionenlinien) mit Impulsübertrag q liefert eine Übergangswahrscheinlichkeit der Form

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{w}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu w(p')) (\bar{u}(k) \gamma_\mu w(k') \bar{w}(k') \gamma_\nu u(k)),$$

wobei die einlaufenden Fermionen Impulse p, p' besitzen, und die auslaufenden k, k' , und natürlich $q = p + p' = k + k'$ gelten muss. Mittlet man den ersten Faktor über alle Spins, so ergibt sich

$$\sum_{s, s'} \bar{w}_{s' \alpha}(p') \gamma_{\alpha \beta}^\mu u_{s \beta}(p) \bar{u}_{s \gamma}(p) \gamma_{\gamma \delta}^\nu w_{s' \delta}(p') = (\not{p}' - m)_{\delta \alpha} \gamma_{\alpha \beta}^\mu (\not{p} + m)_{\beta \gamma} \gamma_{\gamma \delta}^\nu = \text{tr} [(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu].$$

Zusammen mit dem zweiten Faktor ergibt dies einen für die QED sehr typischen Ausdruck, nämlich

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{tr} [(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu] \text{tr} [(\not{k} + m) \gamma_\mu (\not{k}' - m) \gamma_\nu].$$

Spurtheoreme. Es ist praktisch, einige der am häufigsten auftretenden Spuren von Produkten von γ -Matrizen zur Hand zu haben. Im Prinzip sind diese alle elementar zu beweisen, was aber in längere Rechnungen ausarten kann. Hier einige der wichtigsten Formeln:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbb{1}) &= 4, \\ \text{tr}(\text{ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen}) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}), \\ \text{tr}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Wenn mehrere Ausdrücke zusammenkommen, in denen der vollständig antisymmetrische Tensor vom Range vier auftritt, sind auch die folgenden Identitäten sehr hilfreich:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24, \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu_\nu, \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho). \end{aligned}$$

Kontraktions-Identitäten. Es kann auch vorkommen, dass innerhalb einer Spur von γ -Matrizen Paare von γ -Matrizen kontrahiert werden, d.h. innerhalb von Spuren Ausdrücke wie $\gamma^\mu \gamma_\mu$ auftreten. Es ist dann am besten, diese Ausdrücke im Vorhinein zu eliminieren. So ist z.B. offensichtlich

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 4.$$

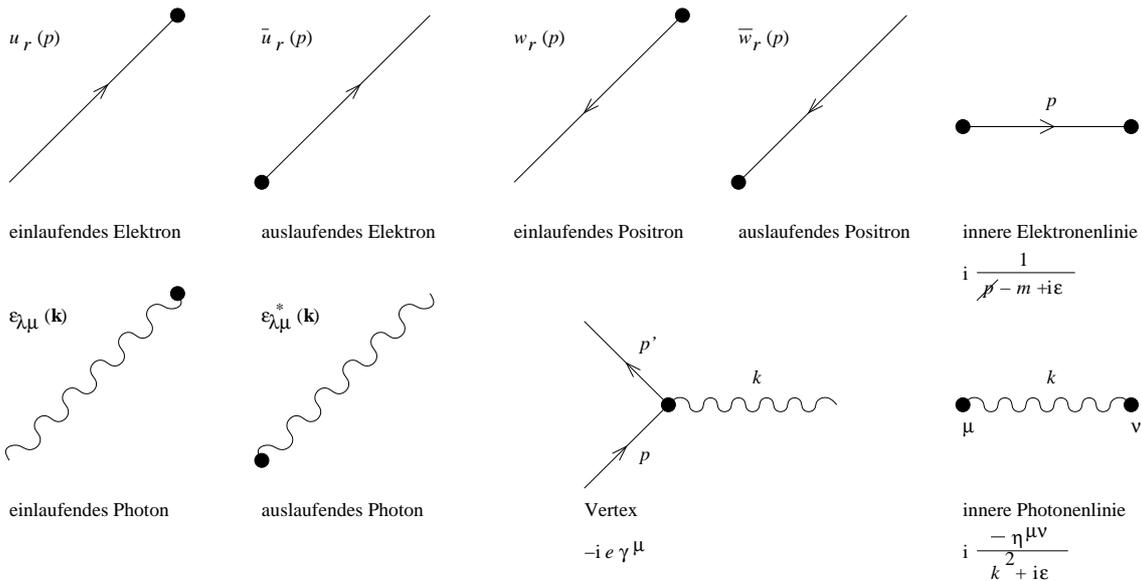
Nun stehen die zu kontrahierenden Matrizen nicht notwendigerweise genau nebeneinander. Daher auch hierfür ein paar nützliche Identitäten für den Hausgebrauch:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4\eta^{\nu\rho}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu, \end{aligned}$$

wobei man die Umkehrung der Reihenfolge in der letzten Identität beachte. Es sei allerdings erwähnt, dass die Spur von Produkten von γ -Matrizen nicht nur invariant unter zyklischen Vertauschungen ist, sondern dass sie auch invariant unter der Umkehr der Reihenfolge der γ -Matrizen ist, $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu)$.

FEYNMANN-REGELN DER QED

Zum Abschluss seien hier noch die Feynmann-Regeln der QED kurz zusammengefasst. In der QED gibt es Fermionen, im allgemeinen sind die Elektronen und Positronen, es können aber auch Myonen oder Taus und deren Antiteilchen sein, die sich von den Elektronen lediglich durch ihre Masse unterscheiden. Als Bosonen treten lediglich die Photonen auf. Es gibt also zwei Typen von Linien, und die möglichen Linien und Vertices sind demnach



zusammen mit einer weiteren Möglichkeit, einer äußeren Photonlinie, die ein externes Feld darstellt und einen Faktor $A_{\text{ext}}^\mu(k)$ liefert. Im Grunde gibt es in der echten QED keine externen Felder mehr, aber es ist für viele experimentelle eine sinnvolle Approximation. Die äußere, nicht näher spezifizierte Quelle des elektromagnetischen Feldes wird dann mit einem Vertex \otimes gekennzeichnet, von dem keine zwei Fermionenlinien abgehen.

Die Regeln. Um eine beliebige Amplitude \mathcal{M} ausrechnen zu können sind im Prinzip nur die folgenden zehn Regeln zu beachten. Leider ist "im Prinzip" eine freundliche Umschreibung für zum Teil höllisch viel Arbeit. Außerdem ist immer impliziert, dass wir eine Amplitude nur bis zu einer gegebenen Ordnung in der Störungstheorie ausrechnen, also nur bis zu einer gegebenen maximalen Anzahl von Vertices in den Feynmann-Graphen. Die Regeln lauten:

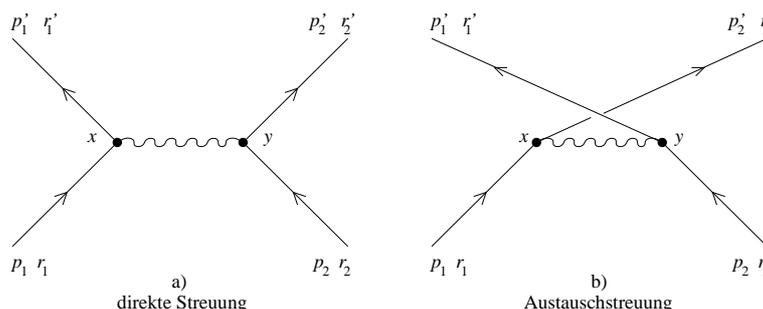
1. Jeder Vertex erhält einen Faktor $-ie\gamma^\mu$.
2. Jede innere Photonlinie erhält den Photonen-Propagator $i\mathcal{D}_F^{\mu\nu}(k) = -i\eta^{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$ als Faktor.
3. Jede innere Fermionenlinie erhält den Dirac-Propagator $iS_F(p) = -i \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$ als Faktor.
4. Die äußeren Linien erhalten die folgenden *freien* Spinoren und Polarisationsvektoren:
 - $u_r(p)$ für ein einlaufendes Elektron,
 - $\bar{u}_r(p)$ für ein auslaufendes Elektron,
 - $\bar{w}_r(p)$ für ein einlaufendes Positron,
 - $w_r(p)$ für ein auslaufendes Positron,
 - $\epsilon_\lambda^\nu(\mathbf{k})$ für ein einlaufendes Photon,
 - $\epsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k})$ für ein auslaufendes Photon,
 - $A_{\text{ext}}^\mu(k)$ für die Beschreibung eines äußeren elektromagnetischen Feldes.
5. Die Spinorfaktoren (γ -Matrizen, S_F -Propagatoren, Vierer-Spinoren) werden für jede Fermionenlinie von rechts nach links gelesen entlang der Pfeile der Fermionenlinie folgend angeordnet.
6. Jede in sich geschlossene Fermionenlinie erhält einen Faktor (-1) , und es ist über alle Spinor-Indizes die Spur zu bilden.
7. An jedem Vertex müssen die Vierer-Impulse der drei dort zusammentreffenden Linien Energie- und Impulserhaltung genügen.
8. Über alle jetzt noch freien Viererimpulse ist mit $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ zu integrieren.
9. Schließlich wird das Ergebnis mit einem Phasenfaktor $\delta_P = \pm 1 = (-1)^P$ multipliziert, der die Anzahl P von Transpositionen enthält, die notwendig sind, um alle Fermionen-Operatoren auf Normalordnung zu bringen.
10. Dies ergibt die Amplitude eines Feynmann-Diagrammes. Um nun die Übergangswahrscheinlichkeit zu finden, muss man die Summe über alle topologisch verschiedenen Feynmann-Diagramme erstrecken (ggf. noch durch bestimmte Symmetriefaktoren teilen) und von diesem Resultat das Betragsquadrat nehmen. Diese Summe ist natürlich unendlich und wird nur bis zu einer gewünschten Ordnung, d.h. Anzahl von Vertices, der Feynmann-Diagramme genommen.

Die Gesamt-Amplitude für vorgegebene Anfangs- und Endzustände ist gegeben als Matrixelement der S -Matrix, und hat die generelle Form

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + \left((2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left(\prod_{i \in \text{externe Fermionen}} \sqrt{\frac{m_i}{VE_{\mathbf{p}_i}}} \right) \left(\prod_{j \in \text{externe Photonen}} \sqrt{\frac{1}{2V|\mathbf{k}_j|}} \right) \right) \times \sum_{G \in \text{topol. verschiedene Graphen}} \mathcal{M}_G,$$

wobei P_f und P_i die Gesamtimpulse des End- und Anfangszustandes sind, und \mathcal{M}_G die zum Feynmann-Graphen G gehörende Amplitude ist.

Beispiel. Wir schließen unsere Reihe von Handouts mit einem Beispiel, das einige der erläuterten Prinzipien noch einmal vorführt. Es geht um die Elektron-Elektron-Streuung, also den Prozess $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, der in erster nichttrivialer Näherung ein Prozess zweiter Ordnung ist. Die beiden Graphen, die in dieser Ordnung beitragen, sind



Das S -Matrizelement für die direkte Streuung, gegeben durch den Graphen a), ist gegeben durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle_a &= -e^2 \int d^4x d^4y \sqrt{\frac{m^4}{V^4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}'_1} E_{\mathbf{p}'_2}}} e^{-ip_1x + ip'_1x - ip_2y + ip'_2y} \\ &\times (\bar{u}_{r'_1}(p'_1) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1)) (\bar{u}_{r'_2}(p'_2) \gamma^\nu u_{r_2}(p_2)) i \mathcal{D}_{F,\mu\nu}(x-y). \end{aligned}$$

Den analogen Beitrag für die Austauschstreuung gemäß dem Graphen b) erhält man, indem man in $-\langle f|S^{(2)}|i\rangle_a$ die Wellenfunktionen der Endzustände vertauscht, so dass wir das Matrizelement

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle_b &= -e^2 \int d^4x d^4y \sqrt{\frac{m^4}{V^4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}'_1} E_{\mathbf{p}'_2}}} e^{-ip_1x + ip'_1y - ip_2y + ip'_2x} \\ &\times (-1) (\bar{u}_{r'_2}(p'_2) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1)) (\bar{u}_{r'_1}(p'_1) \gamma^\nu u_{r_2}(p_2)) i \mathcal{D}_{F,\mu\nu}(x-y) \end{aligned}$$

erhalten. Das Vorzeichen ergibt sich daher, dass im Austauschterm eine ungerade Anzahl von Antivertauschungen von Fermionen notwendig ist, um die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in dieselbe Reihenfolge wie im Term der direkten Streuung zu bringen. Setzt man $i\mathcal{D}_{F,\mu\nu}(x-y) = -i\eta_{\mu\nu} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$ ein und führt die Integration aus, so ergibt sich insgesamt

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{m^4}{V^4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}'_1} E_{\mathbf{p}'_2}}} (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b).$$

Hierbei sind die Matrizelemente der Graphen a) und b) gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= -e^2 \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) i \tilde{\mathcal{D}}_{F,\mu\nu}(p_2 - p'_2) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2), \\ \mathcal{M}_b &= +e^2 \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) i \tilde{\mathcal{D}}_{F,\mu\nu}(p_2 - p'_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2). \end{aligned}$$

Der Impulsübertrag ist also im Graphen a) durch $k = p_2 - p'_2$ gegeben, im Graphen b) hingegen durch $k = p_2 - p'_1$. Rechnet man im Schwerpunktsystem, so vereinfachen sich diese Ausdrücke erheblich. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt findet man mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$ im Schwerpunktsystem

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Schwerpunktssystem}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{m_1 m_2}{E_{\text{gesamt}}} |\mathcal{M}|^2,$$

wobei E_{gesamt} die Gesamtenergie ist. In unserem Beispiel ist natürlich $m_1 = m_2 \equiv m$. Das Endergebnis, die *Møller-Formel*, lautet schließlich nach längerer Rechnung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 (2E^2 - m^2)^2}{4E^2 (E^2 - m^2)^2} \left(\frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \frac{(E^2 - m^2)^2}{(2E^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^4 \theta} \right) \right), \quad (***)$$

wobei der Streuwinkel θ der Winkel zwischen \mathbf{p}'_1 und \mathbf{p}_2 ist. Im Schwerpunktsystem sind $p_1 = (E, \mathbf{p})$, $p'_2 = (E, -\mathbf{p}')$, $p'_1 = (E, \mathbf{p}')$ und $p_2 = (E, -\mathbf{p})$. Um dieses Resultat zu erhalten, muss man $|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*)$ berechnen. Mit $\tilde{\mathcal{D}}_{F,\mu\nu} = -i\eta_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$ und unpolarisiertem Anfangs- und Endzustand findet man z.B.

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_a|^2} &= \frac{e^2}{4} \sum_{r_i, r'_i} \bar{u}_{r'_1}(p'_1) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1) \bar{u}_{r'_2}(p'_2) \gamma^\nu u_{r_2}(p_2) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} \bar{u}_{r_1}(p_1) \gamma^\nu u_{r'_1}(p'_1) \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r'_2}(p'_2) \\ &= \frac{e^2}{4} \sum_{r_i, r'_i} \bar{u}_{r_1}(p_1) \gamma^\nu u_{r'_1}(p'_1) \bar{u}_{r'_1}(p'_1) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1) \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r'_2}(p'_2) \bar{u}_{r'_2}(p'_2) \gamma_\mu u_{r_2}(p_2) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} \\ &= \frac{e^2}{4} \text{tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \right) \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Vertauschungssymmetrie ergibt sich der zweite Term $\overline{|\mathcal{M}_b|^2} = \overline{|\mathcal{M}_a|^2}(p'_1 \leftrightarrow p'_2)$, also einfach durch Austauschen der beiden auslaufenden Impulse. Der dritte Term hingegen wird zu

$$\begin{aligned} \overline{\text{Re}(\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*)} &= \frac{e^2}{4} \sum_{r_i, r'_i} \frac{\text{Re}(\bar{u}_{r'_1}(p'_1) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1) \bar{u}_{r'_2}(p'_2) \gamma^\nu u_{r_2}(p_2) \bar{u}_{r_1}(p_1) \gamma^\nu u_{r'_1}(p'_1) \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r'_2}(p'_2))}{(p'_1 - p_2)^2 (p'_2 - p_1)^2} \\ &= -\frac{e^2}{4} \frac{1}{(p'_1 - p_2)^2 (p'_2 - p_1)^2} \text{tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right). \end{aligned}$$

Die Spuren können nun mit Hilfe der weiter oben aufgelisteten Spurtheoreme ausgerechnet werden, was als Übungsaufgabe für Mutige überlassen sei. Zum Schluss muss (***) herauskommen, wenn man die Impulse im Schwerpunktsystem einsetzt.