Handout VII zur Vorlesung THEORETISCHE PHYSIK III — Mic$\hbar$ael Flohr
Mehr Mehrteilchensysteme — 28. und 29. November 2002

PERMUTATIONS-SYMMETRIE UND YOUNG-TABLEAUX

In der Vorlesung haben wir untersucht, was die Konsequenzen von Permutations-Symmetrie sind. Sind N ununterscheidbare Teilchen gegeben, so sind solche Operatoren physikalisch relevant, die diese N Teilchen alle gleichartig behandeln. Solche Operatoren vertauschen mit Permutationen. Für $\pi \in S_N$ und einen vollständig symmetrischen Operator A gilt dann $[\pi, A] = 0$. Die Wellenfuntion selbst muss jedoch nicht vollständig symmtetrisch sein, da sie nicht direkt gemessen werden kann. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es zwei ein-dimensionale Darstellungen der Permutationsgruppe S_N gibt, und zwar die vollständig symmetrische ($\pi \mapsto 1 \ \ \forall \pi \in S_N$) und die vollständig anti-symmetrische ($\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi) \ \ \forall\pi \in S_N$). Wellenfunktionen, die in der Natur tatsächlich realisiert sind, gehören entweder zur vollständig symmetrischen Darstellung (die zugrunde liegenden Teilchen heißen dann *Bosonen*), oder zur vollständig anti-symmetrischen Darstellung (die zugrunde liegenden Teilchen heißen dann *Fermionen*).

Es ist allerdings nicht völlig unnütz, sich andere, höher-dimensionale, Darstellungen der Permutationsgruppe anzusehen. Dies erleichtert zum Beispiel die Symmetrien von Systemen zu verstehen, in denen mehrere Fermionen miteinander in Wechselwikrung stehen. Wir kennen zum Beispiel schon das Problem eines Zwei-Elektronen-Systems. Die Kopplung der Spins aneinander führt zu einem Tensorprodukt von zwei je zwei-dimensionalen Vektorräumen, $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, mit den vier Zuständen $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$ und $|-,-\rangle$. Hierbei bezeichnet $|a,b\rangle = |a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2$ die entsprechenden Tensorprodukte der Basiszustände der jeweiligen Kopien des Ein-Teilchen-Hilbertraumes. Wir wissen bereits, dass diese Zustände in ein Spin-Singlet und ein Spin-Triplet gruppiert werden können, also in eine vollständig anti-symmetrische ein-dimensionale Darstellung aufgespannt durch $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle)$, und in eine vollständig symmetrische drei-dimensionale Darstellung aufgespannt durch $\{|+,+\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle), |-,-\rangle\}$. In der Tat ändert unter $\pi_{12} \in S_2$ der Singlet-Zustand sein Vorzeichen, während die Triplet-Zustände alle unverändert bleiben. Wie kann man dies bei mehr als zwei Elektronen gut auseinandersortieren?

Young-Tableaux. Ein einzelnes Elektron wollen wir mit $\boxed{1}$ darstellen, wenn sein Spin nach oben zeigt, und mit $\boxed{2}$, wenn sein Spin nach unten zeigt. Diese Objekte sind die grundlegenden *primitiven Objekte* der Gruppe SU(2). Eine einzelne solche Box steht also für ein Spin-Doublet, und die Zahl darin für die konkrete Orientierung des Elektrons in seinem Spin-Doublet.

Als nächstes betrachten wir symmetrische und anti-symmetrische Tableaux. Die Tableaux sollen in horizontaler Richtung immer vollständig symmetrisch sein, und in vertikaler Richtung immer vollständig anti-symmetrisch. Die grundlegenden symmetrischen und anti-symmetrischen Tableaux sind also $\square\square$ und $\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$, so dass Anwenden von $\square\square$ auf ein Zwei-Elektronen-System folgende Möglichkeiten ergibt:

$$\square\square \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1}\boxed{1}\,, \\ \boxed{1}\boxed{2}\,, \\ \boxed{2}\boxed{2}\,. \end{array} \right.$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\boxed{2}\boxed{1}$ nicht auftritt, da bei vollständiger Symmetrisierung dies der selbe Zustand wie $\boxed{1}\boxed{2}$ ist. Um doppeltes Zählen zu vermeiden fordern wir, dass die Zahlen von links nach rechts nicht abnehmen dürfen. Es gibt nur einen vollständig anti-symmetrischen Zustand, und das ist der Zustand $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$. Auch hier wird der Zustand $\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ nicht extra gezählt, um Dopplungen auszuschließen. Aufgrund der Anti-Symmetrie können Zustände wie $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ und $\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$ natürlich nicht auftreten. Alle diese Forderungen lassen sich einfach dadurch sicherstellen, dass die Zahlen von oben nach unten strikt zunehmen müssen.

Dies sei nun das generelle Prinzip (was man per vollständiger Induktion auch beweisen kann). Ein *Young-Tableaux* ist eine Gruppe von Kästchen mit Zahlen als Einträgen, bei der die Zahlen in jeder Zeile von links nach rechts nicht abnehmen dürfen, aber in jeder Spalte von oben nach unten strikt zunehmen müssen. Für drei Elektronen erhalten wir vier vollständig symmetrische Zustände, nämlich

$$\square\square\square \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\,, \\ \boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\,, \\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\,, \\ \boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\,. \end{array} \right.$$

Dies ist natürlich nichts anderes als die $j = \frac{3}{2}$ Darstellung, wie man leicht sieht wenn man bemerkt, dass der Zustand mit magnetischerr Quantenzahl $m = \frac{3}{2}$, bei dem sämtliche Spins in Richtung der positiven z-Achse zeigen, in diesem Quadruplet enthalten ist. Versucht man nun aber, einen vollständig antisymmetrischen Zustand zu erzeugen, erlebt man eine Pleite, da man mit nur den Zahlen 1 und 2 natürlich keine Spalte von drei Kästchen mit strikt aufsteigenden Zahlen füllen kann. In der Tat ist es nicht möglich, den Spin-Zustand dreier Elektronen vollständig anti-symmetrisch zu machen!

Allerdings können wir andere Young-Tableaux betrachten, die eine Mischung aus symmetrisierten und anti-symmetrisierten Zuständen darstellen. Ein Beispiel ist $\ydiagram{2,1}$. Dieses Tableaux können wir entweder auffassen als ein einzelnes Kästchen, was unten an ein vollständig symmetrische Tableau angeheftet wurde, oder als ein einzelnes Kästchen, das rechts an ein vollständig anti-symmetrisches Tableau angeheftet wurde. Symbolisch also

$$\ydiagram{2,1} \;=\; \begin{array}{c}\ydiagram{2}\\ \ydiagram{1}\end{array} \;=\; \ydiagram{1,1}\,\ydiagram{1}\,.$$

Ist die Spin-Wellenfunktion für drei Elektronen anti-symmetrisch in zwei der drei Indices, so kann keiner dieser beiden Indices symmetrisch bezüglich des dritten sein. Zum Beispiel ist $(|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2) \otimes |-\rangle_3$ symmetrisch in (12), aber weder symmetrisch noch anti-symmetrisch in (13) oder (23). Wenn wir Anti-Symmetrie in (13) erzwingen wollen, in dem wir den gleichen Ausdruck mit $1 \leftrightarrow 3$ vertauscht von sich abziehen,

$$|+\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_3|-\rangle_2|+\rangle_1 + |-\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_3|+\rangle_2|-\rangle_1 = (|+\rangle_1|-\rangle_3 - |-\rangle_1|+\rangle_3)|-\rangle_2\,,$$

so ist dieser Zustand zwar wirklich anti-symmetrisch in (13), aber die ursrprüngliche Symmetrie in (12) ging verloren. In jedem Fall ist aber die Dimension von $\ydiagram{2,1}$ zwei, so dass dieses Tableau ein $j = \frac{1}{2}$ Spin-Doublet repräsentiert. Dieses Tableau entsteht ja durch die Spin-Addition eines Spin-Doublets $\ydiagram{1}$ und eines Spin-Triplets $\ydiagram{2}$, wobei wir das symmetrische Quadruplet $\ydiagram{3}$ aber schon aufgebraucht haben. Was übrig bleibt, muss als ein Doublet sein. Umgekehrt können wir auch ein Doublet $\ydiagram{1}$ und ein Singlet $\ydiagram{1,1}$ aneinander koppeln, was offensichtlich nur ein Doublet ergeben kann. Also, wie wir es auch drehen und wenden, die Darstellung $\ydiagram{2,1}$ kann nur ein Spin-Doublet sein. Aber das ist genau das, was uns die bisherigen Regeln auch ergeben, denn Einfüllen der Zahlen strikt nach den Regeln ergibt genau zwei Möglichkeiten:

$$\begin{ytableau}1&1\\2\end{ytableau} \quad \text{und} \quad \begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}\,.$$

Die einzige weitere Regel die wir noch beachten müssen ist die, dass nur solche Tabelaux vorkommen, in denen nie eine längere Zeile unter einer kürzeren steht, d.h. die Zeilenlänge nimmt von oben nach unten nie zu. Diese weitere Regel garantiert letztlich, wie wir noch sehen werden, dass verschiedene Darstellungen nicht dopplet vorkommen.

Clebsch-Gordan-Reihe. Mit diesen Regeln können wir nun die Clebsch-Gordan-Reihe für die Addition von Drehimpulsen graphisch darstellen:

$$\begin{array}{rcccccc}
\rho^{(1/2)} & \otimes & \rho^{(1/2)} & = & \rho^{(1)} & \oplus & \rho^{(0)} \\
\rho^{(1)} & \otimes & \rho^{(1/2)} & = & \rho^{(3/2)} & \oplus & \rho^{(1/2)} \\
\rho^{(0)} & \otimes & \rho^{(1/2)} & = & \rho^{(1/2)} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\ydiagram{1} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{2} & \oplus & \ydiagram{1,1} \\
\ydiagram{2} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{3} & \oplus & \ydiagram{2,1} \\
\ydiagram{1,1} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{2,1} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathbf{2} \times \mathbf{2} & = & \mathbf{3} + \mathbf{1}\,, \\
\mathbf{3} \times \mathbf{2} & = & \mathbf{4} + \mathbf{2}\,, \\
\mathbf{1} \times \mathbf{2} & = & \mathbf{2}\,.
\end{array}$$

Wir können dies alles nun sofort auf andere Freiheitsgrade verallgemeinern. Lassen wir zum Beispiel *drei* verschiedene primitive Objete zu, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, so können wir sofort Darstellungen der SU(3) miteinander koppeln. Dies ist zum Beispiel im Standardmodell der Elementarteilchen wichtig, wo die Quarks eine dreiwertige Farbladung tragen, so dass die Zahlen 1,2,3 hier z.B. für rot,grün,blau stehen können. Die starke Kernkraft wird in der Tat heute als SU(3) Eichtheorie formuliert. Wir können dies hier nicht beweisen, aber die Regeln für Young-Tableaux gelten unabhängig davon, wieviele Freiheitsgrade existieren, d.h. unabhängig davon, welche Zahlen $1, \ldots, n$ eingetragen werden dürfen. Sind die ersten n Zahlen erlaubt, erhält man ganz allgemein die SU(n) Young-Tabelaux. Die Resultate, die man bei Verallgemeinern dieser Regeln erhält, sind auf jeden Fall vernünftig und konsistent, z.B.:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Dimension 3} & : & \ydiagram{1} = \begin{ytableau}1\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}3\end{ytableau} \\
\text{Dimension 3} & : & \ydiagram{1,1} = \begin{ytableau}1\\2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1\\3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2\\3\end{ytableau} \\
\text{Dimension 1} & : & \ydiagram{1,1,1} = \begin{ytableau}1\\2\\3\end{ytableau} \\
\text{Dimension 6} & : & \ydiagram{2} = \begin{ytableau}1&1\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}3&3\end{ytableau} \\
\text{Dimension 10} & : & \ydiagram{3} = \begin{ytableau}1&1&1\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&1&2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&1&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&2&2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&2&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&3&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&2&2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&2&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&3&3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}3&3&3\end{ytableau} \\
\text{Dimension 8} & : & \ydiagram{2,1} = \begin{ytableau}1&1\\2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&2\\2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&3\\2\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&1\\3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&2\\3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}1&3\\3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&2\\3\end{ytableau}\,, \begin{ytableau}2&3\\3\end{ytableau}
\end{array}$$

Wir finden also zwei *verschiedene* Darstellungen von SU(3) der Dimension 3. Diese werden zur besseren Unterscheidung $\mathbf{3}$ und $\mathbf{3}^*$ bezeichnet. Somit sind also $\mathbf{3}^*$ und $\mathbf{1}$ anti-symmetrische Darstellungen, $\mathbf{6}$ und $\mathbf{10}$ symmetrische Darstellungen und $\mathbf{8}$ ist eine Darstellung mit gemischter Symmetrie. Die Darstellungen, die zu den Young-Tabelaux gehören, sind gerade die irreduziblen Darstellungen.

Dimension der Darstellungen. Auch dies können wir hier nicht beweisen, aber es gibt eine einfache Regel zur Bestimmung der Dimension einer irreduziblen Darstellung. Dafür brauchen wir eine kleine Hilfsregel. In einem Young-Tableaux zu SU(n) dürfen Spalten der Länge n ersatzlos gestrichen werden. Also bei SU(3) dürfen wir aus den Young-Tabelaux, die eine (oder mehrere) Spalte(n) der Länge drei enthalten, diese einfach streichen. Dies entsrpicht dem Eliminieren eines (oder mehrerer) Singlets auf der linken Seite eines Tableaux. Ein SU(3)-Tableau hat höchstens drei Zeilen, deren Längen von oben nach unten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ sind. Da wir aber λ_3 Spalten von links streichen dürfen, sind alle Tableaux letztlich durch die Zahlen $\lambda_1 - \lambda_2$ und $\lambda_2 - \lambda_3$ eindeutig bestimmt, und damit die irreduziblen Darstellungen von SU(3). Die Darstellung gekennzeichnet durch das Tripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ hat die Dimension

$$\mathrm{dim}\rho^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \;=\; d(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \;=\; \frac{(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_3+1)(\lambda_1-\lambda_3+2)}{2}\,.$$

Für den allgemeineren Fall der Gruppe SU(n) kann man die Formel leider nicht mehr ganz so einfach hinschreiben. Sei Y ein SU(n)-Young-Tableau. Dann hat jedes Kästchen darin eine Hausnummer (r, s), wobei r die Reihe und s die Spalte angibt. Jedes solches Kästchen hat außerdem eine sogenannte *Hakenlänge*, die angibt, wieviele Kästchen rechts von unserem Kästchen stehen plus wieviele Kästchen unter unserem Kästchen stehen. Die Hakenlänge ist also definiert als $h_{r,s} = |\{(r', s') : r' = r, s' \geq s \text{ oder } r' \geq r, s' = s\}|$. Bezeichnet λ_r die Länge der r-ten Zeile und μ_s die Länge der s-ten Spalte, so ist offensichtlich $h_{r,s} = \lambda_r + \mu_s - r - s + 1$. Damit ergibt sich die Dimension der Darstellung $\Lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ zu

$$\mathrm{dim}\rho^{\Lambda} \;=\; d(\Lambda) \;=\; \prod_{(r,s)\in Y_\Lambda} \frac{n-r+s}{h_{r,s}}\,.$$

Ein Young-Tableaux ist durch die Angabe von Λ eindeutig bestimmt. Die μ_s lassen sich aus den λ_r ausrechnen, was hier als Übungsaufgabe überlassen sein soll.

Tensoren. Die Bedeutung eines einzelnen Kästchens muss nicht die der fundamentalen irreduziblen Darstellung einer einfachen Lie-Gruppe sein. Nehmen wir zum Beispiel einmal an, dass $\square$ einfach für die $j = 1$ Spin-Darstellung von SO(3) stehen soll – statt für die $j = \frac{1}{2}$ Spin-Darstellung von SU(2). Dann korrespondieren die Tableaux nicht mehr notwendigerweise zu irreduziblen Darstellungen. Betrachten wir zum Beispiel $\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1}$. Das horizontale Tableau hat sechs Zustände, und zerfällt in eine $j = 2$ Darstellung mit Multiplizität fünf und eine $j = 0$ Darstellung mit Multiplizität eins. Beide diese Darstellungen sind symmetrisch. Dies ist nichts anderes als die Konstruktion eines symmetrischen Tensors vom Range zwei mit Hilfe der dyadischen Paarung zweier Vektoren. Das vertikale Tableau entspricht einer anti-symmetrischen $j = 1$ Darstellung, die sich wie das Vektor-Produkt zweier Vektoren verhält. Um die Drehimpulsaddition dreier Darstellungen $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ zu finden, betrachten wir zunächst

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ydiagram{2} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{3} & \oplus & \ydiagram{2,1} & \quad & \mathbf{6}\times\mathbf{3} & = & \mathbf{10}+\mathbf{8}\,, \\ \ydiagram{1,1} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{2,1} & \oplus & \ydiagram{1,1,1} & \quad & \mathbf{3}\times\mathbf{3} & = & \mathbf{8}+\mathbf{1}\,. \end{array}$$

Wie zerlegt sich nun $\ydiagram{3}$? Diese Darstellung muss natürlich $j = 3$ enthalten. Allerdings ist dies nicht der einzige vollständig symmetrische Zustand. Für drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ist auch $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ vollständig symmetrisch, und transformiert offenbar wie ein Vektor, d.h. wie eine $j = 1$ Darstellung mit drei Zuständen. Etwas mühsamer ist es, die acht Zustände von $\ydiagram{2,1}$ auseinander zu sortieren. Man macht sich zunächst klar, dass $\mathbf{8} \neq \mathbf{7} + \mathbf{1}$ ist, da $\mathbf{7}$ vollständig symmterisch wäre, $\mathbf{1}$ vollständig anti-symmetrisch, aber $\mathbf{8}$ gemischte Symmetrie besitzt. Die einzige Möglichkeit ist tatsächlich $\mathbf{8} = \mathbf{5} + \mathbf{3}$, also eine Zerlegung in $j = 2$ und $j = 1$. Es ergibt sich also

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \ydiagram{1} & \otimes & \ydiagram{1} & \otimes & \ydiagram{1} & = & \ydiagram{3} & \oplus & \ydiagram{2,1} & \oplus & \ydiagram{2,1} & \oplus & \ydiagram{1,1,1} & \\ \mathbf{3} & \times & \mathbf{3} & \times & \mathbf{3} & = & \mathbf{10} & + & \mathbf{8} & + & \mathbf{8} & + & \mathbf{1} & . \\ & & & & & & \mathbf{7}+\mathbf{3} & & \mathbf{5}+\mathbf{3} & & \mathbf{5}+\mathbf{3} & & & \end{array}$$

Wir erhalten also einmal die $j = 3$ Darstellung (7-dim., vollst. symm.), zweimal die $j = 2$ Darstellungen (5-dim., gemischte Symm.), dreimal die $j = 1$ Darstellung (3-dim., einmal vollst. symm., zweimal mit gemischter Symm.) und schließlich einmal die $j = 0$ Darstellung (1-dim., vollst. anti-symm.). Dass die $j = 0$ Darstellung eindeutig ist, liegt einfach daran, dass für drei Vektoren nur $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ invariant unter Rotationen ist. Dieser Ausdruck ist allerdings anti-symmetrisch. Dass nur eine der $j = 1$ Darstellungen symmetrisch ist, sieht man im Zugang über Tensoren sofort. Es gibt drei linear unabhängige Vektoren, die aus $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ konstruiert werden können, nämlich $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, $\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$, $\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. Nur die oben angegebene Linearkombination ist vollständig symmetrisch.

Quark. In den frühen Tagen der theoretischen Erforschung der stakren Wechselwirkung kannte man zunächst nur drei Quarks, nämlich *up*, *down* und *strange*, kurz einfach u, d, s notiert. Man nahm an, dass diese drei *Geschmäker* (engl. *flavors*) eine SU(3) Symmetrie manifestieren. Ein einzelnes Kästchen $\square$ stehe jetzt also für u, d, oder s. Nun hatten die Experimentalphysiker einen recht beachtlichen Zoo von sogenannten Elementarteilchen entdeckt, den man nun gerne in Form von SU(3)-Multiplets organisiert hätte, um etwas Ordnung in das Durcheinander zu bringen. Wir betrachten einmal das Dekuplet $\square\square\square$ (**10**) und dabei auch den sogenannten Iso-Spin I:

$$
\begin{array}{lll}
\Delta^{++,+,0,-} & ddd, udd, uud, uuu & I = \frac{3}{2}\,, \\
\Sigma^{+,0,-} & dds, uds, uus & I = 1\,, \\
\Xi^{0,-} & dss, uss & I = \frac{1}{2}\,, \\
\Omega^{-} & sss & I = 0\,.
\end{array}
$$

Nun ist ferner bekannt, dass alle zehn Zustände Spin $\frac{3}{2}$ Objekte sind. Phänomenologische Betrachungen lassen es als eine akzeptable Annahme erscheinen, dass sich der Ortsraumanteil der Wellenfunktion für niederenergetische Zustände aus drei Quarks im s-Zustand befindet. Wir sollten daher totale Symmetrie im Spin-Freiheitsgrad der Wellenfunktion erwarten. Zum Beispiel können wir den $j = \frac{3}{2}$, $m = \frac{3}{2}$ Zustand des Δ-Multiplets als einen Zustand betrachten, bei dem die Spins aller drei Quarks jeweils in die selbe Richtung zeigen. Dummerweise sind die Quarks aber alle Spin $\frac{1}{2}$ Objekte, also Fermionen, so dass wir totale Anti-Symmetrie aufgrund der Fermi-Dirac-Statistik erwarten. Wie soll das nun gehen, wenn das $j = \frac{3}{2}$ Dekuplet aber sowohl im Flavor, als auch im Spin und im Ortsraum jeweils vollständig symmetrisch, also insgesmat gerade ist? Dies führte zum sogenannten "Spin-Paradoxon", was deshalb so störend war, weil viele andere Aspekte des nicht-relativistischen Quark-Modells zu wunderbar passten und das ganze Model eigentlich sehr Erfolg versprechend schien.

Der Ausweg war dann, einen weiteren Freiheitsgrad zu postulieren, die sogenannte *Farbladung* (engl. *color*), die die drei Werte *rot*, *grün* und *blau* annehmen kann, abgekürzt r, g, b. Die physikalisch beobachtbaren Hadronen, so war dann die Forderung, sollten dann Farb-Singlet Zustände sein. In der Tat gibt es genau einen Singlet Zustand, der aus drei Quarks gebastelt werden kann,

$$
\frac{1}{\sqrt{6}}\left(|rbg\rangle - |brg\rangle + |bgr\rangle - |gbr\rangle + |grb\rangle - |rgb\rangle\right) \;\equiv\; \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}\,,
$$

was genau dem eindeutigen SU(3)-Tableau entspricht, das wir angegeben haben. Das Statistik-Paradoxon kann nun aufgelöst werden, da $\Psi^{(\mathrm{gesamt})} = \Psi^{(\mathrm{flavor})}\Psi^{(\mathrm{spin})}\Psi^{(\mathrm{ort})}\Psi^{(\mathrm{color})}$ ist, und $\Psi^{(\mathrm{color})}$ ist ungerade. Dies scheint so zunächst eine etwas gewagte Art zu sein, das Dilemma zu umgehen. Es gab aber glücklicherweise noch weitere Indizien dafür, dass ein weiterer Freiheitsgrad für Quarks existieren muss, zum Beispiel von der Zerfallsrate des π^0 Mesons oder vom Wirkungsquerschnitt der Elektronen-Positronen-Annihilation in Hadronen. Heute sehen wir dies als ein hervorragendes Beispiel wie Versuche, Schwierigkeiten in einem theoretischen Gebäude zu überwinden, zu nicht-trivialen Vorhersagen, hier der Farbladung, führen können. Die Quarks sind heute alle nachgewiesen worden, wobei die Anzahl der flavors mit *charme*, *bottom* und *top* inzwischen auf sechs gewachsen ist. Die starke Wechselwirkung der Hadronen ist ein Resultat der Farb-Wechselwirkung der Quarks untereinander, die durch eine sogenannte nicht-abelsche Eichfeldtheorie mit Eichgruppe SU(3) beschrieben wird. Das Standardmodell der Elementarteilchen fasst damit die elektromagnetische, die schwache und die starkte Wechselwirkung zusammen. Bei niedrigen Energien sind diese drei Wechselwirkungen mehr oder weniger unabhängig voneinander, und durch die Eichgruppen U(1), SU(2) und SU(3) gegeben. Alle bekannten Elementarteilchen lassen sich in den irreduziblen Darstellungen dieser Eichgruppen organisieren, wobei natürlich die heutzutage (noch) als wirklich elementar angesehenen Teilchen den fundamentalen Darstellungen entsprechen, die wir jeweils mit einem einzelnen Kästchen als Young-Tableau beschrieben haben. Als wirklich elementare Bestandteile der Materie (Fermionen) gelten heute noch die Leptonen (e, μ, τ) nebst den zugehörigen Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) sowie die Quakrs (u, d, s, c, b, t). Die fundamentalen Wechselwirkungen werden im Rahmen der Quantenfeldtheorie durch den Austausch von Eichbosonen beschrieben. Als Eichbosonen hat man das Photon (γ), die sogenannten intermediären Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung ($W^{\pm}$, Z), und insgesamt acht Gluonen der Farb-Wechselwirkung unter den Quarks ($g^{\alpha\bar{\beta}}$, $\alpha, \beta \in \{r, g, b\}$, $\alpha \neq \beta$).