Solitäre Lösungen des Toda-Gitters

Deniz Stiegemann

April 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Scott Russells Experimente, Korteweg-de-Vries-Gleichung 1
1.2 Eigenschaften von Solitonen 2
1.3 Vorkommen in der Natur 2
1.4 Das Toda-Gitter: Bewegungsgleichungen und Potential 2

2 Solitäre Lösungen des Toda-Gitters **4**
2.1 1-Soliton-Lösung 4
2.2 Zusammenhang zwischen periodischen und solitären Lösungen 5
2.3 2-Solitonen-Lösung 6

Literatur **7**

1 Einführung

Hinweis: Zu diesem Vortrag gehört ein *Mathematica*-Notebook, in dem einige Rechnungen und Beispiele ausgeführt sind; hierauf wird im folgenden Text mit $\langle \mathrm{M} \rangle$ verwiesen.

1.1 Scott Russells Experimente, Korteweg-de-Vries-Gleichung

Solitonen wurden entdeckt und das erste Mal untersucht von John Scott Russell (1808–1882), einem schottischen Schiffbauingenieur. Er machte im Jahre 1834 folgende Beobachtung:

> I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour [14 km/h], preserving its original figure some thirty feet [9 m] long and a foot to a foot and a half [300–450 mm] in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles [2–3 km] I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears.

Scott Russell führte Experimente durch, in denen er lange Wasserwellen in langen, flachen Becken erzeugte und ihre Form, Ausbreitungsgeschwindigkeit und Stabilität untersuchen konnte. Das gelang aber nur für positive Wellen, negative Wellen („dunkle Solitonen“) mit den ursprünglich beobachteten Eigenschaften konnte er nicht erzeugen.

Es dauerte etwa vierzig Jahre, bis Rayleigh und Boussinesq das Phänomen theoretisch erklären konnten; die Arbeit Boussinesqs war später auch bedeutend für Korteweg und de Vries. Letztere veröffentlichten 1895 eine Arbeit, in der sie die nach ihnen benannte Korteweg-de-Vries-Gleichung oder KdV-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \tag{1.1}$$

behandelten; hierbei kann man u als Höhe des Wassers im Kanal sowie τ und ξ als Zeit- bzw. Ortskoordinate verstehen. Das Modell von Korteweg und de Vries hatte sech^2-artige Lösungen, welche auch schon Rayleigh und Boussinesq erkannt hatten und die **solitäre Wellen** genannt wurden. Der Begriff **Soliton** wurde erst später im Jahr 1965 von den Mathematikern Zabusky und Kruskal geprägt, um den Teilchencharakter der solitären Wellen hervorzuheben.

Das Toda-Gitter, welches in diesem Vortrag im Mittelpunkt steht, besitzt ebenfalls solche Solitonlösungen. In späteren Vorträgen wird sogar gezeigt werden, dass das Toda-Gitter eine „diskrete Variante“ der kontinuierlichen KdV-Gleichung ist.

1.2 Eigenschaften von Solitonen

Solitonen sind einzelne Wellenberge, die sich in mancher Hinsicht wie Teilchen verhalten. Das Phänomen kann in nichtlinearen, disperiven Medien auftreten, wenn das durch die Dispersion verursachte „Auseinanderfließen“, also Verbreitern und Abflachen eines Wellenpaketes, gerade kompensiert wird durch die Nichtlinearität. Das Paket ist dann stabil und verändert seine Form nicht. Dies beobachtete bereits Scott Russell. In der KdV-Gleichung lautet der für die Nichtlinearität verantwortliche Term $u\frac{\partial u}{\partial \xi}$, während die Dispersion durch den Term $\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}$ hervorgerufen wird. Solitonen gehen (bis auf mögliche Phasenverschiebungen) unverändert aus Kollisionen mit anderen Solitonen hervor.

1.3 Vorkommen in der Natur

Solitonen kommen in verschiedenster Weise in der Natur vor:

- Gezeitenwellen können die Gestalt von Solitonen annehmen; große Wellen dieser Art treten besonders auf dem Amazonas in Erscheinung.
- Falaco-Solitonen sind langlebige Strudel im (sonst ruhigen) Wasser.
- In der Lichtwellenleitertechnik wird versucht, Soliton-Pulse elektromagnetischer Felder zu erzeugen, um die Signalübertragung über große Entfernungen zu verbessern.
- Es gibt ein Wolkenphänomen, die sogenannte Morning Glory Cloud, welches man als Soliton betrachten kann.

1.4 Das Toda-Gitter: Bewegungsgleichungen und Potential

An dieser Stelle soll zunächst kurz die Herleitung der Bewegungsgleichungen des Toda-Gitters wiederholt werden.

Die Bewegungsgleichungen eines einatomigen Gitters lauten allgemein

$$m\ddot{y}_n = \phi'(y_{n+1} - y_n) - \phi'(y_n - y_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

wobei y_n die Auslenkung des n-ten Teilchens aus seiner Ruhelage ist. Alle Teilchen sollen die gleiche Masse m haben. Das Potential $\phi = \phi(r)$ ist für alle Federn gleich und hängt nur von der Auslenkung r einer Feder ab. Im Folgenden wird immer gemeint sein, dass es sich um abzählbar unendlich viele Massen handelt, falls nichts anderes angegeben wird.

Oft ist es einfacher, nicht die Auslenkung der Teilchen zu betrachten, sondern die Auslenkung der Federn, die durch die gegenseitige Auslenkung

$$r_n = y_{n+1} - y_n \tag{1.3}$$

zweier benachbarter Teilchen gegeben ist. Im folgenden wählen wir die r_n als generalisierte Koordinaten. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{r}_n = \phi'(r_{n+1}) - 2\phi'(r_n) + \phi'(r_{n-1}). \tag{1.4}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und zur vereinfachten Darstellung der Summen seien nun $y_0 = 0$ und $n \geq 0$. Die kinetische Energie des Systems ist dann

$$T = \frac{1}{2}\sum_n m\dot{y}_n^2 = \frac{1}{2}m\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\dot{r}_k\right)^2. \tag{1.5}$$

Daraus erhält man die kanonischen Gleichungen

$$\dot{r}_n = -\frac{s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}}{m} \tag{1.6a}$$

$$\dot{s}_n = -\phi'(r_n), \tag{1.6b}$$

wobei s_n der zu r_n kanonisch konjugierte Impuls ist. Man kann zeigen, dass dann

$$s_{n-1} - s_n = m\dot{y}_n \tag{1.7}$$

gilt. Dies lässt sich für beliebige y_0 und n verallgemeinern.

Falls (1.6b) invertierbar ist mit $r_n = -\frac{1}{m}\chi(\dot{s}_n)$, so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(\dot{s}_n) = s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} \tag{1.8}$$

des zu (1.4) dualen Systems.

Bei einer linearen Kette mit Federkonstante κ ist das Potential $\phi_{\text{lin}}(r) = \frac{\kappa}{2}r^2$. Das Toda-Gitter wird hingegen bestimmt durch ein Potential der Form

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar, \quad ab > 0, \tag{1.9}$$

welches in ⟨M⟩ dargestellt ist. Zur Vereinfachung seien im weiteren Verlauf immer $a, b > 0$. Im Falle des Toda-Gitters erhält man die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{y}_n = a\left(e^{-b(y_{n+1}-y_n)} - e^{-b(y_n-y_{n-1})}\right), \tag{1.10}$$

$$m\ddot{r}_n = a\left(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}\right). \tag{1.11}$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{r}_n = -\frac{s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}}{m} \tag{1.12a}$$

$$\dot{s}_n = a\left(e^{-br_n} - 1\right) \tag{1.12b}$$

Mit

$$r_n = \chi(\dot{s}_n) = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{1}{a}\dot{s}_n + 1\right) \tag{1.13}$$

erhält man schließlich die zu (1.11) duale Gleichung

$$\frac{\ddot{s}_n}{\dot{s}_n + a} = \frac{b}{m}(s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}). \tag{1.14}$$

2 Solitäre Lösungen des Toda-Gitters

2.1 1-Soliton-Lösung

Im weiteren Verlauf werden wir nun bestimmte Lösungen der zueinander äquivalenten Bewegungsgleichungen (1.10) bis (1.12) und (1.14) betrachten. Diese Lösungen stellen Solitonen dar. Es ist einfacher, mit dem dualen System (1.14) zu beginnen.

2.1 Satz. *Die Bewegungsgleichungen* (1.14) *des zum Toda-Gitter dualen Systems haben Lösungen der Form*

$$s_n(t) = \pm\frac{\beta m}{b}\tanh(\alpha n \pm \beta t) + \text{const}, \tag{2.1}$$

wobei $\alpha \neq 0$ *eine Konstante ist und*

$$\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}}\sinh\alpha. \tag{2.2}$$

Beweis. Siehe ⟨M⟩. □

2.2 Bemerkungen. (a) Mithilfe von (1.12) erhält man die Darstellung

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{m}{ab}\beta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n \pm \beta t). \tag{2.3}$$

Sie lässt sich auf die explizite Form

$$r_n(t) = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{m}{ab}\beta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n \pm \beta t) + 1\right) \tag{2.4}$$

bringen.

Beweis. Dies folgt aus $\tanh' = \operatorname{sech}^2$. □

(b) Die Auslenkung des n-ten Teilchens des Solitons ist gegeben durch

$$y_n(t) = \frac{1}{b}\ln\frac{1 + e^{2(\alpha(n-1)\pm\beta t)}}{1 + e^{2(\alpha n \pm \beta t)}} + \text{const}. \tag{2.5}$$

Beweis. Dies folgt aus (1.7). □

(c) Man kann zeigen, dass es keine Lösung der Form

$$e^{-br_n} - 1 = \gamma^2 - \delta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n - \beta t) \tag{2.6}$$

gibt, d.h. es gibt keine „dunklen“ Solitonen.

Wegen $r_n \leq 0$ handelt es sich beim Soliton des Toda-Gitters um einen einzelnen, verdichteten Wellenberg. Alle Federn sind gestaucht. In großer Entfernung vom Soliton (d.h. vom Minimum von r_n) ist die Auslenkung der Federn allerdings klein und sie verschwindet für $n \to \pm\infty$. Das Gitter besteht also im Falle der Solitonlösung fast nur aus kaum gegeneinander ausgelenkten Massen, mit Ausnahme der einen Stelle der Massenverdichtung, die das Soliton darstellt.

Eine 1-Soliton-Lösung des Toda-Gitters ist durch Angabe von α und des die Bewegungsrichtung bestimmenden Vorzeichens eindeutig festgelegt.

Im folgenden wollen wir nun einige Eigenschaften der Solitonenlösungen festhalten.

2.3 Beispiele. (a) Das Soliton bewegt sich mit der **Geschwindigkeit**

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{ab}{m}}\frac{\sinh\alpha}{\alpha}, \tag{2.7}$$

wobei als Längeneinheit der Gitterabstand gewählt wurde. Das Soliton ist damit immer schneller als cn-artige Wellen großer Wellenlänge, welche die Geschwindigkeit $c_0 = \sqrt{ab/m}$ haben.

Beweis. Die Phasengeschwindigkeit einer Welle ist $c = \lambda\nu = \omega/q$, wobei λ die Wellenlänge, ν die Frequenz, ω die Kreisfrequenz und q die Wellenzahl ist. Für das Soliton (2.4) gelten $\omega = \beta$ und $q = \alpha$, also $c = \beta/\alpha$.

Die Dispersionsbeziehung der cn-artigen Welle ist bekanntlich

$$\nu(\lambda) = \frac{1}{2K}\sqrt{\frac{ab}{m}}\Big/\sqrt{\frac{1}{\mathrm{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K}}\,. \tag{2.8}$$

Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit bei großen Wellenlängen zu

$$c_0 = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\nu(\lambda) = \sqrt{\frac{ab}{m}}.$$

Daraus folgt dann $|c| > c_0$. □

(b) Der Paramter α bestimmt die **Gestalt** der Welle: Je größer α ist, desto höher wird das Maximum von $r_n(t)$. Die Welle wird schmaler und bewegt sich schneller. Der Zusammenhang zwischen α und β ist in ⟨M⟩ dargestellt.

(c) Weiter oben wurde bereits erwähnt, dass das Toda-Gitter im Fall der Solitonenlösung komprimiert ist. Die **Stauchung** des Gitters beträgt insgesamt $y_{-\infty} - y_\infty = 2\alpha/b$. ⟨M⟩

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\alpha > 0$. Dann ist offensichtlich $y_{-\infty} = 0$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b}\ln\left(e^{-2\alpha}\frac{e^{2\alpha} + e^{2(\alpha n\pm\beta t)}}{1 + e^{2(\alpha n\pm\beta t)}}\right) = -\frac{2\alpha}{b}.$$ □

(d) Mithilfe der Stauchung lässt sich dem Soliton die **Masse**

$$M := m(y_{-\infty} - y_\infty) = \frac{2\alpha}{b}m \tag{2.9}$$

zuordnen.

(e) Das Soliton hat den **Impuls** $P = Mc = 2m\beta/b$.

Beweis. Mit (1.7) und $\lim_{x\to\pm\infty}\tanh x = \pm 1$ gilt

$$P = \sum m\dot{y}_n = \sum(s_{n-1} - s_n) = s_{-\infty} - s_\infty = 2m\beta/b.$$ □

(f) Die **Energie** des Solitons ist $E = \frac{2a}{b}(\sinh\alpha\cosh\alpha - \alpha)$. Siehe auch ⟨M⟩.

2.2 Zusammenhang zwischen periodischen und solitären Lösungen

Im ersten Vortrag wurde die periodische Lösung

$$e^{-bp_n} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m}\left[\mathrm{dn}^2\left(2\left(\frac{n}{\lambda} \pm \nu t\right)K\right) - \frac{E}{K}\right] \tag{2.10}$$

des Toda-Gitters mit der Wellenlänge λ und der Frequenz ν eingeführt, die der Dispersionrelation (2.8) genügen. Die vollständigen elliptischen Integrale E und K hängen vom elliptischen Modul k ab; außerdem ist $K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2})$. Die periodische Lösung lässt sich durch soliton-artige Pulse darstellen:

2.4 Satz. *Sei p_n wie in* (2.10) *eine* cn-*artige periodische Lösung von* (1.11). *Sie besitzt die folgende Reihendarstellung:*

$$e^{-bp_n} - 1 = \frac{m}{ab}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\beta^2\,\mathrm{sech}^2\left(\alpha(n-\lambda l) - \beta t\right) - 2\beta\nu\right). \tag{2.11}$$

Die Parameter α und β sind festgelegt durch

$$\alpha = \frac{\pi K}{\lambda K'},\quad \beta = \frac{\pi K\nu}{K'}. \tag{2.12}$$

Die einzelnen sech^2-Pulse in (2.11) haben den Abstand einer Wellenlänge λ voneinander und die Geschwindigkeit $\beta/\alpha = \lambda\nu$. Hervorzuheben ist, dass das Gitter mit cn-Welle auch gestreckte Federn enthält; dafür verantwortlich ist der Term $-2\beta\nu$. $\langle$M$\rangle$

Umgekehrt ergibt sich die Solitonlösung auch aus der cn-artigen Welle:

2.5 Satz. *Man erhält das Soliton* (2.3) *aus der* cn-*Welle* (2.10) *für große Wellenlänge* $\lambda \to \infty$ *und großen elliptischen Modul* $k \to 1$. $\langle$M$\rangle$

2.3 2-Solitonen-Lösung

Im folgenden sei

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \left(1 + A_1 e^{2(\alpha_1 n - \beta_1 t)} + A_2 e^{2(\alpha_2 n - \beta_2 t)} + e^{2((\alpha_1+\alpha_2)n - (\beta_1+\beta_2)t)} \right). \tag{2.13}$$

2.6 Satz. *Das zum Toda-Gitter duale System* (1.14) *hat eine Lösung*

$$s_n = \dot{S}_n. \tag{2.14}$$

Die Auslenkung

$$y_n = \frac{1}{m}(S_{n-1} - S_n) \tag{2.15}$$

ist also eine Lösung von (1.10). *Dabei gelten*

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{ab}{m} \sinh^2 \alpha_1, \quad \beta_2^2 = \frac{ab}{m} \sinh^2 \alpha_2, \\ A_1 A_2 &= \frac{\frac{ab}{m}(\beta_1+\beta_2)^2 - \sinh^2(\alpha_1+\alpha_2)}{\sinh^2(\alpha_1-\alpha_2) - \frac{ab}{m}(\beta_1-\beta_2)^2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Diese Lösung beschreibt ein Gitter, durch das sich zwei Solitonen bewegen. Sie können miteinander kollidieren. Wenn sich beide Solitonen in dieselbe Richtung bewegen, kann das eine Soliton das zweite überholen; alternativ können sie sich auch aufeinander zu bewegen. Eine 2-Solitonen-Lösung ist eindeutig bestimmt durch Angabe von α_1, α_2, A_1 und den Vorzeichen von β_1 und β_2.

Da die Bewegungsgleichungen des Toda-Gitters nicht linear sind, kann es sich bei der o.a. Lösung nicht einfach um eine (additive) Superposition zweier Solitonen handeln. Dennoch zeigen sich die beiden Solitonen asymptotisch in dieser Lösung, wenn man den Grenzfall $t \to \pm\infty$ betrachtet.

2.7 Satz. *Es sei* $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. *Dann erhält man im Grenzfall* $t \to \pm\infty$ *aus der 2-Solitonen-Lösung zwei einzelne Solitonen*

$$e^{-br_n} - 1 = \begin{cases} \frac{m}{ab}\beta_1^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_1 n - \beta_1 + \delta^\pm) \\ \frac{m}{ab}\beta_2^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_2 n - \beta_2 - \delta^\pm) \end{cases}, \tag{2.17}$$

falls $\beta_1\beta_2 > 0$, *und*

$$e^{-br_n} - 1 = \begin{cases} \frac{m}{ab}\beta_1^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_1 n - \beta_1 + \delta^\pm) \\ \frac{m}{ab}\beta_2^2 \operatorname{sech}^2(\alpha_2 n + |\beta_2| - \delta^\pm) \end{cases}, \tag{2.18}$$

falls $\beta_1\beta_2 < 0$, *wobei*

$$\delta^- = \frac{1}{2}\ln A_1, \quad \delta^+ = \frac{1}{2}\ln A_2. \tag{2.19}$$

Dies bedeutet, dass die Form der Solitonen durch die Kollision nicht verändert wird. Im ersten Fall ($\beta_1\beta_2 > 0$) bewegen sich zwei Solitonen in dieselbe Richtung und das eine überholt das andere. Im zweiten Fall ($\beta_1\beta_2 < 0$) bewegen sich zwei Solitonen in entgegengesetzte Richtungen und kollidieren.

Literatur

[Afe] I. Afek. Non-linear Wave propagation in the one dimensional Toda lattice. 2004.

[All] J. E. Allen. The Early History of Solitons (Solitary Waves). *Physica Scripta*, 57(3):436, 1998.

[dJ] E. M. de Jager. On the origin of the Korteweg-de Vries equation. Forum der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Band 19, Dezember 2011, pp. 171-195, 2006.

[Tod] M. Toda. *Theory of Nonlinear Lattices*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer-Verlag, 1989.