



Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Das Toda-Gitter: periodische Lösungen

Daniel Westerfeld

Institut für Theoretische Physik

11. April 2012

Institut für Theoretische Physik



Leibniz
Universität
Hannover

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Überblick

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme

Der Weg zum
integralen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung

Periodische
Lösungen

Ergebnisse

1 Motivation

- Einführung
- Das FPU-Problem

2 Vorbereitungen

- Duale Systeme
- Der Weg zum integralen Gitter

3 Das Toda-Gitter

- Charakterisierung
- Periodische Lösungen
- Ergebnisse



Einführung

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Betrachte eindimensionale Kette N identischer Teilchen.
Wechselwirkung nur zwischen Nachbarn \implies
Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{y}_n = \underbrace{\phi'(y_{n+1} - y_n)}_{\text{Kraft vom rechten Nachbarn}} - \underbrace{\phi'(y_n - y_{n-1})}_{\text{Kraft vom linken Nachbarn}} \quad (1)$$

wobei ϕ' der Gradient von ϕ ist .

Im gesamten Vortrag sei $r_n := y_{n+1} - y_n$, dann

$$\phi'(r_n) = \frac{d\phi(r_n)}{dr_n} \quad (2)$$

Das Fermi-Pasta-Ulam Problem

1	1
10	2
100	4

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme

Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung

Periodische
Lösungen

Ergebnisse

- Lineares Gitter: Energieerhaltung für jede Normalmode
- Fermis Vermutung: Energieaustausch bei nichtlinearen Gittern
- Untersuchten z.B. kubisches Potential mit $N = 64$ Teilchen, Randteilchen fest.

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2}r^2 + \frac{\kappa\alpha}{3}r^3 \quad (3)$$

- Computerversuche bringen überraschende Resultate

FPU Recurrence Phänomen

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

- Starte in erster Normalmode
- Erwartung: Energieübertrag auf alle anderen Moden, Thermodynamisches Gleichgewicht
- Ergebnis: Energieübertrag ja, aber beinahe Rückkehr in Ausgangsverteilung \Rightarrow fast periodisch!

Suche nach nichtlinearen Systemen mit periodischen Lösungen begann.

FPU Recurrence Phänomen

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

- Motivation
- Einführung
- Das FPU-Problem
- Vorbereitungen
 - Duale Systeme
 - Der Weg zum integrierbaren Gitter
- Das Toda-Gitter
 - Charakterisierung
 - Periodische Lösungen
 - Ergebnisse

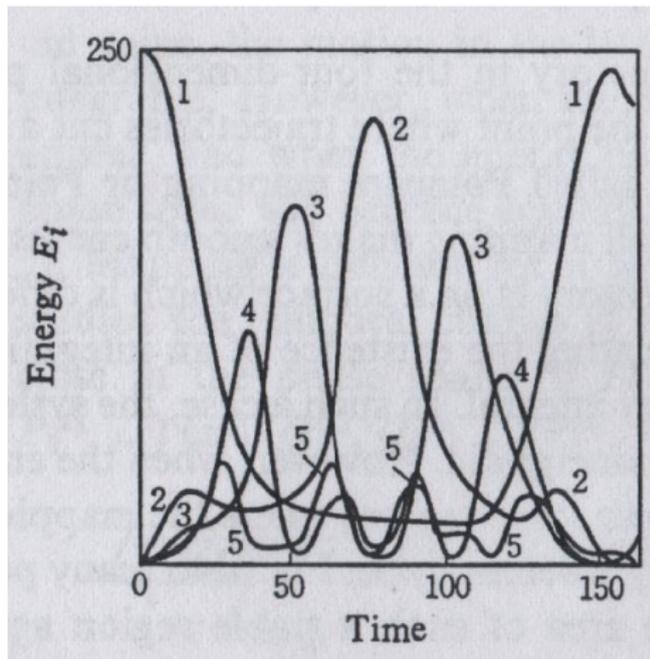


Abbildung: Energieübertrag zwischen Normalmoden

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Duale Systeme

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme

Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung

Periodische
Lösungen
Ergebnisse

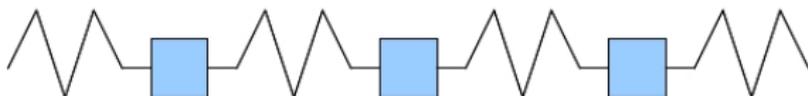
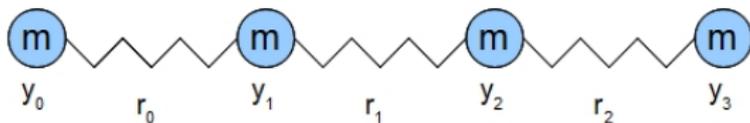


Abbildung: Duales System

- Betrachte ein *duales Gitter*, bei dem schwere Massen durch schwache Federn und umgekehrt ersetzt wurden.
- Bei linearen Gittern gibt es duales System mit identischen Normalmoden!



Duale Systeme

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Betrachte Hamiltonian zu durch (1) beschriebenes System.

$$H = \frac{1}{2m} \sum_n p_n^2 + \sum_n \phi(r_n) \quad (4)$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_n m \dot{y}_n^2. \quad (5)$$

Da ϕ unabhängig von \dot{y}_n ist gilt:

$$p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_n} = m \dot{y}_n \quad (6)$$



Duale Systeme

Nutze generalisierte Koordinate r_n und kanonisch konjugierten Impuls s_n . Wobei

$$y_0 = 0, y_1 = r_0, y_2 = r_0 + r_1, \dots \quad (7)$$

$$\dot{y}_0 = 0, \dot{y}_1 = \dot{r}_0, \dot{y}_2 = \dot{r}_0 + \dot{r}_1, \dots \quad (8)$$

gilt.

Dann gilt für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} m (\dot{r}_0 + \dot{r}_1 + \dots + \dot{r}_n)^2 \quad (9)$$

und damit für den kanonisch konjugierten Impuls s_n

$$s_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_n} = m [(\dot{r}_0 + \dots + \dot{r}_n) + \dots + (\dot{r}_0 + \dots + \dot{r}_{N-1})] \quad (10)$$

Ferner:

$$s_{n-1} - s_n = m \dot{y}_n \quad (11)$$

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse



Duale Systeme

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{N-1} (s_{n+1} - s_n)^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \phi(r_n) \quad (12)$$

⇒ Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{r}_n = \frac{\partial H}{\partial s_n} = -\frac{s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}}{m} \quad (13)$$

$$\dot{s}_n = -\frac{\partial H}{\partial r_n} = -\phi'(r_n) \quad (14)$$

Falls (14) invertierbar können wir schreiben:

$$r_n = -\frac{1}{m} \chi(\dot{s}_n) \quad (15)$$

Zeitableitung liefert unter Nutzung der Gleichung für \dot{r}_n

$$\frac{d}{dt} \chi(\dot{s}_n) = s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} \quad (16)$$

die gesuchte duale Bewegungsgleichung.

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Die Suche nach dem integrablen Gitter

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

- Suche Funktionen $\phi(r)$ und s_n , die die duale Bewegungsgleichung (16) erfüllen.
- Trigonometrische Funktionen \leftrightarrow harmonisches Gitter
Elliptische Funktionen \leftrightarrow nichtlineares Gitter
„Verallgemeinerung“ der trigonometrischen Funktionen.
- Verschiedene Experimente mit elliptischen Funktionen führten auf exponentielles Potential \Rightarrow Tafelrechnung

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \text{ mit } a, b \text{ konstant} \quad (17)$$

Im folgenden betrachten wir stets dieses Potential mit sogenannten cn-Wellen als Lösung.



Dispersionsrelation

$\chi(\dot{s})$ darf nicht ν und λ enthalten.

$$\chi(\dot{s}) = \frac{m}{b} \ln \left(1 + \underbrace{\frac{\frac{b/m}{(2K\nu^2)}}{\text{sn}^2(2K/\lambda) - 1 + E/K}}_{=1/a=const.} \dot{s} \right) \quad (18)$$

wodurch sich die Dispersionsrelation

$$\nu = \sqrt{\frac{ab}{m} \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{\text{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K} \right)^{-1/2}} \quad (19)$$

ergibt.

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme

Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung

Periodische
Lösungen

Ergebnisse

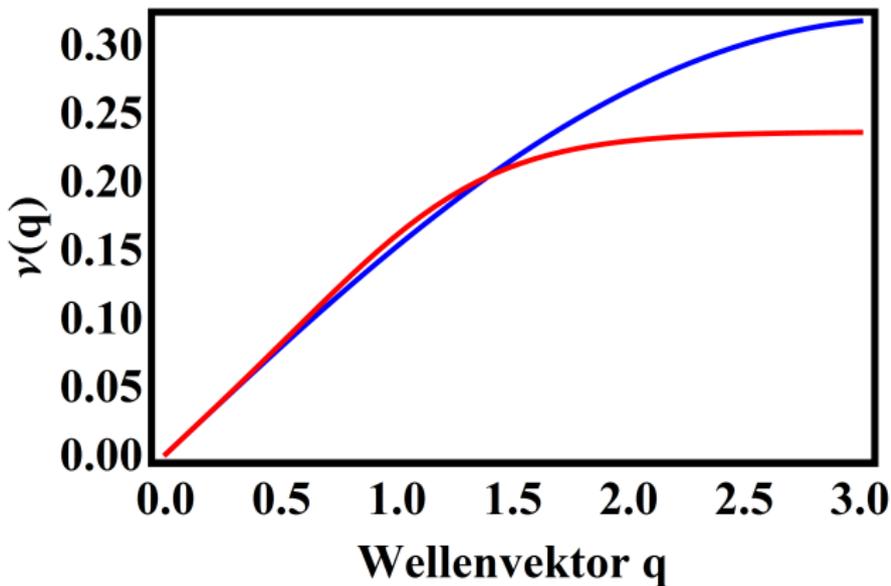


Abbildung: Dispersionsrelation

- **blau**: Linearer Grenzfall ($k = 0.1$)
- **rot**: Hochgradig nichtlineares Verhalten ($k = 0.999$)



Historisches

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation
Einführung
Das
FPU-Problem
Vorbereitungen
Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter
Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

- Benannt nach Morikazu Toda (1917-2010)
- FPU-Phänomen als Anregung
- Untersuchung ab 1967 und Fund von Solitonenlösungen
- Vollständig integrables System



Eigenschaften des Potentials

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Betrachte das exponentielle Potential

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad (ab > 0) \quad (20)$$

Entwicklung für kleine $|r|$ um Ursprung liefert:

$$\phi(r) = \frac{ab}{2}r^2 - \frac{ab^2}{6}r^3 + \dots \quad (21)$$

\Rightarrow Harmonisches Potential für kleine $|r|$ mit $\kappa = ab$
 $1/b$ hat Dimension einer Länge. \Rightarrow Nichtlineare Längenskala
Betrachte nun verschiedene Grenzfälle des Potentials.

Grenzfälle

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

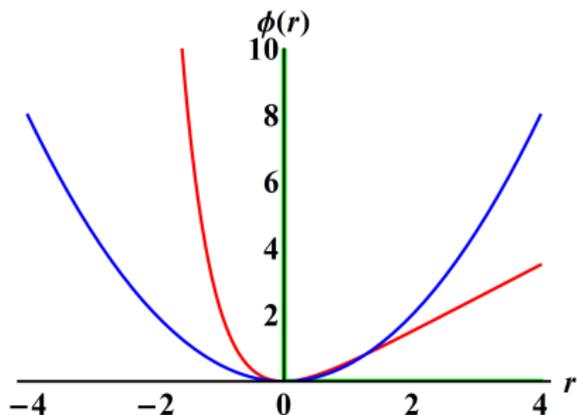


Abbildung: Verschiedene Potentialverläufe

Gut erkennbar: Die Grenzfälle

- **rot** = Mittelding
- **grün** = $b \rightarrow \infty$
⇒ Hard-Sphere-Limit
- **blau** = $b \rightarrow 0$
⇒ Linearer Grenzfall



Bewegungsgleichungen

$ar \leftrightarrow$ konstante Kraft \Rightarrow Kein Beitrag zu Bewegungsgleichungen! Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt:

$$m\ddot{r}_n = -2\phi'(r_n) + \phi'(r_{n-1}) + \phi'(r_{n+1}) \quad (22)$$

$$m\ddot{r}_n = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \quad (23)$$

Für die duale Gleichung erhalten wir aus (16):

$$\frac{d}{dt} \ln(a + \dot{s}_n) = \frac{b}{m}(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) \quad (24)$$

$$\frac{\ddot{s}_n}{a + \dot{s}_n} = \frac{b}{m}(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) \quad (25)$$

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung

Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrierten
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung

Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Lösung der Bewegungsgleichung:

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m} \left\{ \operatorname{dn}^2 \left[2 \left(\frac{n}{\lambda} \pm \nu t \right) K \right] - \frac{E}{K} \right\} \quad (26)$$

mit den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Art K und E

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (27)$$

$$E = E(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (28)$$

Die elliptische dn-Funktion kann durch cn-Funktionen ausgedrückt werden. Die Lösungen werden daher auch als *cn-Wellen* bezeichnet

Ferner gilt, wie gesehen, die Dispersionsrelation (18)

$$\nu = \sqrt{\frac{ab}{m} \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K} \right)^{-1/2}}$$

für die cn-Welle.

Lösung lässt sich auch durch sech ausdrücken. (Ohne Beweis)

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{m}{ab} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta^2 \operatorname{sech}^2 [\alpha(n - \lambda l) - \beta t] - 2\beta\nu \right\} \quad (29)$$

Wobei wir

$$\alpha := \frac{\pi K}{\lambda K'}, \quad \beta := \frac{\pi K\nu}{K'} \quad (30)$$

$$K' := K(k') \quad k' := \sqrt{1 - k^2} \quad (31)$$

gesetzt haben.

Untersuchung der Lösung

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ 10 & 2 \\ 100 & 4 \end{array}$$

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation

Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen

Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter

Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Ohne Beweis: Für $k \ll 1$ gilt:

$$r_n \simeq -\frac{\omega^2 k^2}{8ab} \cos\left(\omega t \pm \frac{2\pi n}{\lambda}\right) \quad (32)$$

$$\omega \simeq \frac{\sqrt{\frac{ab}{m}}}{\lambda} \quad (33)$$

\Rightarrow Lineares Gitter!

Überprüfen wir das ganze durch Versuche mit Mathematica!

1	1
10	2
100	4

Ergebnisse

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation
Einführung
Das
FPU-Problem

Vorbereitungen
Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter

Das
Toda-Gitter
Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

- $k \ll 1 \Leftrightarrow$ Lineares Verhalten, kleine Amplituden
 $k \simeq 1 \Leftrightarrow$ Stark nicht lineares Verhalten, große Amplituden
- k ist Grad für Nichtlinearität.
- Gitter dehnt sich bei Schwingung aus!
- Abfolge von Pulsen aus sechs Darstellung einsehbar.

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Ende

Das
Toda-Gitter:
periodische
Lösungen

Daniel
Westerfeld

Motivation
Einführung
Das
FPU-Problem
Vorbereitungen
Duale Systeme
Der Weg zum
integrablen
Gitter
Das
Toda-Gitter
Charakterisierung
Periodische
Lösungen
Ergebnisse

Vielen Dank für die
Aufmerksamkeit!