"zero-curvature" für die NLS-Gleichung

Christian Bick

Proseminar Solitonen

4. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Motivation

- Das NLS Modell soll mit inverser Streutheorie gelöst werden.
- Die folgenden Beobachtungen werden uns dabei helfen.
- Werden ein Funktional finden, das Erhaltungsgrößen für die Schrödingergleichung liefert.

Die NLS Gleichung

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\varkappa|\psi|^2\psi \tag{1}$$

Ansätze I

Dient als Kompatibilitätsbedingung für:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda)F \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda)F \tag{3}$$

Ansätze II

Wobei:

$$U = U_0 + \lambda U_1 \tag{4}$$

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 \tag{5}$$

Ansätze III

Mit:

$$U_0 = \sqrt{\varkappa}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\varkappa}(\bar{\psi}\sigma_+ + \psi\sigma_-) \tag{6}$$

$$U_1 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\sigma_3 \tag{7}$$

$$V_0 = i\sqrt{\varkappa}\begin{pmatrix} \sqrt{\varkappa}|\psi|^2 - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} - \sqrt{\varkappa}|\psi|^2 \end{pmatrix} = i\varkappa|\psi|^2\sigma_3 - i\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\sigma_+ - \frac{\partial\psi}{\partial x}\sigma_-\right) \tag{8}$$

$$V_1 = -U_0 \tag{9}$$

$$V_2 = -U_1 \tag{10}$$

Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \tag{11}$$

Eichung

Wechsel des Bezugssystems:

$$F(x,t,\lambda) \to G(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \tag{12}$$

$$U \to \frac{\partial G}{\partial x}G^{-1} + GUG^{-1} \tag{13}$$

$$V \to \frac{\partial G}{\partial t}G^{-1} + GVG^{-1} \tag{14}$$

Stellt eine Eichtransformation dar.

Paralleltransport I

$$\Omega_\gamma = \exp\left(\int_\gamma U \mathrm{d}x + V \mathrm{d}t\right) \tag{15}$$

wobei γ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit dem Startpunkt (x_0, t_0) und dem Ende (x, t).

Paralleltransport II

Nun wollen die die λ Abhängigkeit entfernen.

$$L_n = I + \int_{\gamma_n} (U \mathrm{d}x + V \mathrm{d}t) \tag{16}$$

dann sei:

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^{N} L_n \tag{17}$$

Paralleltransport III

Paralleltransport entlang γ:

$$F_\gamma = \Omega_\gamma F \tag{18}$$

Mit unserer Eichbedingung (12):

$$\Omega_\gamma \to G(x,t)\Omega_\gamma G^{-1}(x_0,t_0) \tag{19}$$

Paralleltransport IIII

Hängt nur von seinen Start- bzw. Endpunkten ab.

$$F(x, t) = \Omega_\gamma F(x_0, t_0) \tag{20}$$

Für geschlossene Kurve γ ist:

$$\Omega_\gamma = I \tag{21}$$

Ist also die lokale zero curvature Bedingung.

Anwendung I

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = U(x, t_0, \lambda)F \tag{22}$$

Anwendung II

Quasi-Periodische Bedingung:

$$U(x+2L,t,\lambda) = Q^{-1}(\theta)U(x,t,\lambda)Q(\theta) \tag{23}$$
$$V(x+2L,t,\lambda) = Q^{-1}(\theta)V(x,t,\lambda)Q(\theta) \tag{24}$$

mit

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} = \exp\left(\frac{i\theta\sigma_3}{2}\right) \tag{25}$$

Die Monodromie Matrix I

Monodromie Matrix T_L beschreibt den Paralleltransport

$$T_L(\lambda, t_0) = \exp \int_{-L}^{L} U(x, t_0, \lambda)\mathrm{d}x \tag{26}$$

Die Monodromie Matrix II

folgt aus (21) und $\Omega_{\gamma_1+\gamma_2} = \Omega_{\gamma_2}\Omega_{\gamma_1}$

$$S_-^{-1} T_L^{-1}(t_2) S_+ T_L(t_1) = 1 \tag{27}$$

$$S_\pm(\lambda, t_1, t_2) = \exp \int_{t_1}^{t_2} V(\pm L, t, \lambda) \mathrm{d}t \tag{28}$$

Die Monodromie Matrix III

Aus der Quasi-Periodizität (23) und (24) folgt:

$$S_+ = Q^{-1}(\theta) S_- Q(\theta) \tag{29}$$

Es ergibt sich also für die Monodromie Matrix:

$$T_L(\lambda, t_2) Q(\theta) = S_+(t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) Q(\theta) S_+^{-1}(t_1, t_2) \tag{30}$$

Die Monodromie Matrix IIII

Aus dem vorherigen folgt, dass:

$$\text{Spur } T_L(\lambda, t_2)Q(\theta) = \text{Spur } T_L(\lambda, t_1)Q(\theta) \tag{31}$$

Wir erhalten also ein Funktional, dass Erhaltungsgrößen für die NLS liefert.

$$F_L(\lambda) = \text{Spur } T_L(\lambda)Q(\theta) \tag{32}$$

Fazit

- Kompatibilitätsgleichung spielt wichtige Rolle beim Lösen von inversen Streuproblemen
- Finden damit Erhaltungsgrößen für die NLS