Solitonen für die Korteweg-de-Vries-Gleichung

Florian Oppermann

25. April 2012

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Inhaltsverzeichnis

Historisches

- zeitlicher Überblick
- Experimentelle Befunde

Mathematische Beschreibung

- Korteweg-de-Vries-Gleichung
- Wieso Solitonen?
- Solitoneninteraktion

Definition

Wann war was?

- 1834: John Russell beobachtet Solitonen in einem Kanal
- 1871/1876: Herleitung der Wellenform und -geschwindigkeit aus bekannten Gleichungen
- 1895: Korteweg-de-Vries-Gleichung
- ganz lange garnichts
- 1960er: Computerberechnungen ermöglichen intensivere Untersuchungen, gewecktes Interesse durch neue Anwendungsgebiete

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Russells Beobachtungen

Eigenschaften von Wellen in einem Kanal:

- behalten ihre Form weitgehend bei
- langsam abnehmende Höhe
- Volumen der Welle = Volumen des verdrängten Wassers
- Geschwindigkeit: $c^2 = g(h + a)$
  a: Amplitude der Welle, h: Wassertiefe

Boussinesq (1871) und Rayleigh (1876) finden, dass

$$\zeta(x,t) = a\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x-ct}{b}\right), \quad b^2 = \frac{4h^2(h+a)}{3a}$$

die Form der Welle beschreibt.

Korteweg-de-Vries-Gleichung

1895: Korteweg und de Vries stellen die nach ihnen benannte Gleichung auf:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3}\alpha\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right)$$

dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ klein und

$$\sigma = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{g\rho}$$

enthält mit der Oberflächenspannung T und der Dichte ρ Informationen über das Fluid.

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde

Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion

Definition

Korteweg-de-Vries-Gleichung aufräumen

Die Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3}\alpha\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right)$$

ist unhandlich zum Rechnen, deshalb substituiert man

$$u = k_0\zeta + k_1, \quad X = k_2 x + k_3, \quad T = k_4 t + k_5$$

und erhält durch geeignete Wahl der Konstanten $k_0, \ldots, k_5$ beispielsweise die Formen

$$\frac{\partial u}{\partial T} + (1+u)\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0,$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial T} + 6u\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0$$

Wieso Solitonen?

Um der Ursache von Solitonenlösungen auf den Grund zu gehen, betrachten wir die lineare Näherung der KdV-Gleichung

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{(Indizes geben partielle Ableitungen an)}$$

Klar: Lösungen sind Überlagerungen von Fourierkomponenten

$$u \propto e^{i(kx-\omega t)}$$

mit der Dispersionsrelation $\omega = k - k^3$ und

$$\text{Phasengeschwindigkeit} \qquad c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeit} \qquad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 1 - 3k^2$$

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Dispersion und ihre Verhinderung

(Nichtsinusoide) Lösungen von

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

erfahren wegen der dritten Ableitung Dispersion.
Weg damit!

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Dispersion und ihre Verhinderung

Wir betrachten nun

$$u_t + (1 + u)u_x = 0.$$

Für eine beliebige (diff'bare) Funktion f ist

$$u = f(x - (1 + u)t)$$

eine Lösung der DGL. Störungen breiten sich mit Geschwindigkeit $1 + u$ aus, "höhere" Teile der Lösung sind schneller als "flachere".

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Also: Wieso Solitonen?

In der Gleichung

$$u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = u_t + u_x + \color{red}{uu_x} + \color{blue}{u_{xxx}} = 0$$

bewirken Nichtlinearität und Dispersionsterm gegensätzliche Effekte, so dass im Zusammenspiel stabile Lösungen möglich sind.

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

n-Solitonen-Lösung

Klar:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f(x,t),\\
f(x,t) &= \det M, \quad M = \left(M_{i,j}\right)_{i,j}, \quad i,j = 1,\ldots,n\\
M_{i,j}(x,t) &= \delta_{ij} + \frac{2(P_iP_j)^{1/2}}{P_i+P_j}\exp\left[\frac{\xi_i+\xi_j}{2}\right]\\
\xi_i &= P_i x - P_i^3 t - \xi_i^0
\end{aligned}
$$

löst die KdV-Gleichung

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

P_i und ξ_i^0 legen die Amplitude bzw. Phasenverschiebung des i-ten Solitons fest.

Solitoneninteraktion

Numerische Untersuchungen der KdV-Gleichung

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

mit periodischen Randbedingungen ergeben interessante Ergebnisse:
Solitonenlösungen, die hier auftreten, durchqueren einander, ohne nach der Kollision ihre Eigenschaften eingebüßt zu haben (obwohl keine Superposition möglich ist!).
Außerdem: periodisches Verhalten.

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition

Worüber reden wir?

Philip Drazin:
Ein Soliton ist die Lösung einer nichtlinearen Gleichung, die

1. eine Welle fester Form beschreibt,
2. lokalisiert ist und
3. beschädigungslos mit anderen Solitonen wechselwirkt.

Quellen

Literatur:
[Dra] (vgl. Themenliste)
Ryogo Hirota (Physical Review Letters), 1971

Außerdem:
Videos des *Institut CARNOT de Bourgogne*:
Video 1 — Video 2

Historisches
zeitlicher Überblick
Experimentelle Befunde
Mathematische Beschreibung
Korteweg-de-Vries-Gleichung
Wieso Solitonen?
Solitoneninteraktion
Definition