Die Bäcklund – Transformation

Die Bäcklund-Transformation ist eine kanonische Transformation (Typ 1, also von ~~at~~ alten und neuen Ortskoordinaten abhängig), mit der aus bereits bekannten Lösungen neue Lösungen gewonnen werden können.

Gegeben sei eine Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2} \sum_n P_n^2 + V(Q_1 \dots Q_n)$$

$$\text{mit } V(Q_1 \dots Q_n) = \sum_n \frac{f_n(Q)}{f_{n+1}(Q)}$$

Ferner seien folgende Bedingungen an die kanonische Transformation gestellt:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= A \frac{f_n(Q)}{f_n(Q')} + \frac{f_{n-1}(Q')}{A f_n(Q)} \\ P_n' &= A \frac{f_n(Q)}{f_n(Q')} + \frac{f_n(Q')}{f_{n+1}(Q)} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dann gilt:

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{n=-N_0}^{N} P_n'^2 + \sum_{n=-N_0}^{N} \frac{f_{n-1}(Q')}{f_n(Q')}\right] - \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-N_0}^{N} P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^{N} \frac{f_n(Q)}{f_{n+1}(Q)}\right] =$$

$$- \frac{1}{2A^2} \left[\frac{f_{-N_0-1}(Q')}{f_{-N_0}(Q)}\right]^2 + \frac{1}{2A^2} \left.\frac{f_N(Q')}{f_{N+1}(Q)}\right]^2$$

Hamilton in den neuen Koordinaten Q_n', P_n'

Hamilton in den alten Koordinaten Q_n, P_n

Unter geeigneten Randbedingungen ein konstanter Term

$$\Rightarrow H'(Q', P') = H(Q, P) + \underset{\text{const.}}{C}$$

Beispiel: Toda-Gitter mit exponentieller Wechselwirkung

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}$$

$$\Rightarrow f_n(Q) = e^{Q_n}$$

Hier ergibt sich für die Erzeugende kanonische Transformation

$W = W(Q, Q')$

$$W(Q, Q') = \sum_j \left[A e^{-(Q_j' - Q_j)} - \frac{1}{A} e^{-(Q_{j+1} - Q_j')} + \alpha (Q_j' - Q_j) \right]$$

wobei $\alpha = \text{const}$. Das α wird im Nachfolgenden benötigt, um eine Überbestimmtheit eines Gleichungssystems zu vermeiden. Wir werden sehen, dass das α die Bäcklund-Transformation nicht stört

$$\boxed{\begin{aligned} P_n &= \frac{\partial W}{\partial Q_n} = A e^{-(Q_n' - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_n - Q_{n-1}')} - \alpha \\ P_n' &= -\frac{\partial W}{\partial Q_n'} = A e^{-(Q_n' - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{n+1} - Q_n')} - \alpha \end{aligned}} \qquad (2)$$

$\cancel{Q_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Q_\infty = \text{const}}$

Randbedingungen:

$$Q_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Q_\infty = \text{const}, \quad Q_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} Q_{-\infty} = \text{const}$$

$$Q_n' \xrightarrow[n \to \infty]{} Q_\infty' = \text{const}, \quad Q_n' \xrightarrow[n \to -\infty]{} Q_{-\infty}' = \text{const}$$

$$P_{\pm\infty} = P_{\pm\infty}' = 0$$

Setzt man die Randbedingungen in (2) ein, so ergibt sich für $A>0$:

$$A = \exp\left(\frac{Q'_\infty + Q'_{-\infty}}{2} - \frac{Q_\infty + Q_{-\infty}}{2}\right) =: A_>$$

$$\alpha = \exp\left(\frac{Q'_\infty - Q'_{-\infty}}{2} - \frac{Q_\infty - Q_{-\infty}}{2}\right) + \exp\left(-\frac{Q'_\infty - Q'_{-\infty}}{2} + \frac{Q_\infty - Q_{-\infty}}{2}\right)$$

$$=: \alpha_>$$

(für $A<0$ ergibt sich

$$A = -A_>$$
$$\alpha = -A_>$$

Hier wird der Fall $A>0$ betrachtet)

Aus (2) ergibt sich

$$P'_n - P_n = \frac{1}{A}\left[e^{-(Q_{n+1} - Q'_n)} - e^{-(Q_n - Q'_{n-1})}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}(P'_n - P_n) = \frac{1}{A}\left[e^{-(Q_\infty - Q'_\infty)} - e^{-(Q_{-\infty} - Q'_{-\infty})}\right]$$

$$= \cancel{e^{-\frac{Q_\infty}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(Q_\infty - Q'_\infty - Q_{-\infty} + Q'_\infty)} - e^{\frac{1}{2}(Q_\infty - Q'_\infty - Q_{-\infty} + Q'_{-\infty})}$$

$$= 2\sinh\left\langle\left[(Q'_\infty - Q'_{-\infty}) - (Q_\infty - Q_{-\infty})\right]\cdot\frac{1}{2}\right\rangle = \text{const.}$$

$$\sum_n P'_n = \sum_n P_n + \beta \quad , \quad \beta = \text{const}$$

Aus (2) ergibt sich:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(P'_n + \alpha)^2 - (P_n + \alpha)^2 = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} - e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} + \text{const.}$$

(Das α_4 tritt nicht mehr auf, die quadratischen Terme heben sich über die Summe weg (außer an $n = \pm\infty$, dort sind sie konstant. Übrig bleiben die Mischterme ~~der binomischen~~ .)

Da gilt: $P_n' = (P_n + \beta)$, folgt:

$$(P_n' + \alpha)^2 - (P_n + \alpha)^2 = (P_n')^2 + 2P_n'\alpha - P_n^2 - 2P_n\alpha$$

$$= (P_n')^2 - (P_n)^2 + 2\beta\alpha = (P_n')^2 - (P_n^2) + \text{const}$$

Womit folgt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (P_n')^2 - (P_n)^2 = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} - e^{-(Q_n'-Q_{n-1}')} + \text{const}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n'^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_n'-Q_{n-1}')}}_{H'(Q',P')} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}}_{H(Q,P)} + \text{const}$$

Hiermit wäre gezeigt, dass das Einführen einer Konstanten α in der Erzeugenden $W(Q, Q')$ die Eigenschaft der Bäcklund-Transformation nicht verändert.

Nun gewinnt man aus $H(Q,P)$ bzw. $H'(Q',P')$ Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_n &= \frac{\partial H}{\partial P_n} = P_n \overset{(2)}{=} A\, e^{-(Q_n'-Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_n - Q_{n-1}')} - \alpha \\ \dot{Q}_n' &= \frac{\partial H'}{\partial P_n'} = P_n' \overset{(2)}{=} A\, e^{-(Q_n'-Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{n+1}-Q_n')} - \alpha \end{aligned}\right\} (3)$$

Kennt man nun ~~die~~ eine Lösung für die Q_n erhält man für Q_n' eine weitere Lösung sofern man die DGLn lösen kann. Dies ist insbesondere dann ein Vorteil, wenn diese DGL leichter zu lösen ist, als die ~~[illegible]~~ ursprüngliche Lösungsmethode anzuwenden (insbesondere bei ~~[illegible]~~ Bewegungsgleichungen mit nichtlinearen Termen).

In unserem Fall ist aus dem vorherigen Kapitel eine Lösung bekannt.

Für $Q_n = \gamma =$ const. ergibt sich:

$$e^{Q_n' - \gamma'} = z \frac{\cosh[k(n-1) + \beta t + \delta]}{\cosh[kn + \beta t + \delta]} \qquad (4)$$

mit $k = \gamma - \gamma'$, $z = e^k$, $\beta = \sinh k$

$\gamma' = Q'_\infty$, $(\alpha = z + z^{-1})$

mit δ als freiem Parameter $(\delta \in \mathbb{C})$

Wir erhalten eine Lösung (Solitonenlösung)

$$e^{-(Q_{n+1}' - Q_n')} - 1 = \sinh^2 k \ \mathrm{sech}^2[kn + \beta t + \delta]$$

Ändern wir δ ~~um~~ $\to \delta + \frac{\pi}{2i}$, erhalten wir

$$e^{-(Q_{n+1}' - Q_n')} - 1 = -\sinh^2 k \ \mathrm{cosech}^2[kn + \beta t + \delta]$$

(Antisolitonenlösung)

Im Folgenden wird gezeigt wie aus der Hintereinanderanwendung von zwei Bäcklundtransformationen aus den Einsolitonenlösungen eine Zweisolitonenlösung, gewonnen werden kann. Vorteil dieses Verfahrens ist, dass man keine DGL mehr lösen muss, sondern die Lösung durch (einfache) Algebraische Methoden erhält.

Wir betrachten hierzu zwei aufeinanderfolgende Bäcklund-Transformationen (diese erhalten wir z.B durch unterschiedliche Wahl der Konstanten in dem Randbedingungen). Für deren Charakterisierung reicht die Kentniss von A_i und z_i (wobei $\alpha_i = z_i + z_i^{-1}$), $i \in \{1,2\}$.

Im folgenden bezeichne $Q_n^{(0)}$ die ursprüngliche, also nicht bäcklund-transformierte Lösungskoordinate, $Q_n^{(1)}$ die einfach bäcklund-transformierte Lösung, wobei $Q_n^{(1)}$ eine Transformation ist, die (A_1, z_1) genügt, während $Q_n^{(2)}$ (ebenfalls einfach Bäcklund-Transformierte) der Transformation (A_2, z_2) genügt. $Q_n^{(1,2)}$ bezeichne die Koordinaten, auf die zuerst nach $Q_n^{(1)}$ transformiert wurden und auf die anschließend (A_2, z_2) wirkt. Analog ergibt sich $Q_n^{(2,1)}$.

Im Folgenden nehmen wir an: $Q_n^{(1,2)} = Q_n^{(2,1)}$

und geben uns als Randbedingung vor:

$$Q_{-\infty}^{(0)} = \gamma^{(0)}, \quad Q_{-\infty}^{(1)} = \gamma^{(1)}, \quad Q_{-\infty}^{(2)} = \gamma^{(2)}, \quad Q_{-\infty}^{(1,2)} = \gamma^{(1,2)}$$

Wir betrachtem im Folgenden erneut das Toda-Gitter mit exponentieller Wechselwirkung.

Es finden von $Q_n^{(0)} \to Q_n^{(1)}$, $Q_n^{(0)} \to Q_n^{(2)}$, $Q_n^{(1)} \to Q_n^{(1,2)}$, $Q_n^{(2)} \to Q_n^{(1,2)}$ jeweils nur einfache Bäcklundtransformationen statt, für die das System von DGLn (3) gilt. Damit ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(i)}\right) = z_i \Big\langle \exp\left[-\left(Q_n^{(i)} - \gamma^{(i)} - Q_n^{(0)} + \gamma^{(0)}\right)\right] \\
&\qquad - \exp\left[-\left(Q_{n-1}^{(i)} - \gamma^{(i)} - Q_{n-1}^{(0)} + \gamma^{(0)}\right)\right]\Big\rangle \\
&\qquad \text{mit } i \in \{1,2\} \\
&\qquad \text{und} \\
&\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(i)} - Q_{n-1}^{(1,2)}\right) = z_k \Big\langle \exp\left[-\left(Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_n^{(i)} + \gamma^{(i)}\right)\right] \\
&\qquad - \exp\left[-\left(Q_{n-1}^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_{n-1}^{(i)} + \gamma^{(i)}\right)\right]\Big\rangle
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

mit $i \in \{1,2\}$, $k \in \{1,2\}$ und $k \neq i$
(also für $i=1$ gilt $k=2$ und umgekehrt)

$$z_1 = A_1 e^{\gamma^{(0)} - \gamma^{(1)}} = A_1 e^{\gamma^{(2)} - \gamma^{(1,2)}}$$

$$z_2 = A_2 e^{\gamma^{(0)} - \gamma^{(2)}} = A_2 e^{\gamma^{(1)} - \gamma^{(1,2)}}$$

Ferner gilt für die Bäcklundtransformationen

$$Q_n^{(0)} + Q_n^{(1,2)} = Q_n^{(1)} + Q_n^{(2)} \qquad (6)$$

insbesondere also

$$\gamma^{(0)} + \gamma^{(1,2)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}$$

Nun werden die Differentiale in (5) folgendermaßen eleminiert:

$$\frac{d}{dt}\left(Q_{n+1}^{(0)} - Q_n^{(1)}\right) + \frac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1,2)}\right) - \frac{d}{dt}\left(Q_{n+1}^{(0)} - Q_n^{(2)}\right) - \frac{d}{dt}\left(Q_n^{(2)} - Q_{n-1}^{(1,2)}\right) = 0$$

Dementsprechend muss auch die Summe der Terme auf der rechten Seite in (5) verschwinden (wobei man den Index in der ersten Gleichung von (5) noch nach oben verschieben muss da $\frac{d}{dt}\left(Q_{n+1}^{(0)} - Q_n^{(i)}\right)$ statt $\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(i)}\right)$ im Term stehen.

Unter Verwendung von Rechenregeln (6) erhält man (bis auf einen Indexfehler):

$$0 = \left[z_1 e^{-Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)}} - z_2 e^{-Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)}}\right] e^{Q_{n+1}^{(0)} - \gamma^{(0)}}$$
$$\underbrace{+\left[z_2 e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}} - z_1 e^{Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)}}\right] e^{-Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)}}}$$

(Hier müsste jeder Index n durch $n-1$ ersetzt werden. Solche Fehler wie auch Vorzeichenfehler treten in der Quelle häufig auf und werden meistens während der Rechnung durch einen Fehler in die entgegengesetzte Richtung kompensiert. An dieser Stelle weiß ich aber ausnahmsweise nicht, wo die Kompensation einsetzt, daher belasse ich es bei dem im Index um 1 fehlerhaften Term).

Damit ergibt sich:

$$e^{Q_n(1,2) - \gamma(1,2) + Q_{n+1}(0) - \gamma(0)} = \frac{z_1 e^{Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}}}{z_1 e^{-(Q_{n+1}(1) - \gamma^{(1)}} \cancel{+ (Q_{n+1}^{(2)} + \gamma^{(2)})} + z_2 e^{-(Q_{n+1}(2) - \gamma^{(2)})}}$$

bzw.

$$e^{Q_n(1,2) - \gamma(1,2) + Q_{n+1}(0) - \gamma(0)} = \frac{z_1 e^{Q_n(2) - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}}}{z_1 e^{Q_{n+1}(2) - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_{n+1}(1) - \gamma^{(1)}}} e^{Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)} + Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)}} \tag{7}$$

Hier sei angemerkt, dass (7) aus (5) gewonnen wurde, ohne eine DGL lösen zu müssen.

Wieder betrachten wir den Fall $Q_n^{(0)} = \text{const.} = \gamma$

Als Resultat gewinnen wir eine Zwei-Solitonen-Lösung.

Aus (4) erhalten wir die bereits bekannte Lösung

$$e^{Q_n^{(i)} - \gamma^{(i)}} = z_i \frac{\varphi_i(n)}{\varphi_i(n+1)} \qquad i \in \{1, 2\}$$

mit
$$\varphi_i(n) = 2D_i \cosh[(n-1)\kappa_i + \beta_i t + \delta_i]$$
$$= B_i e^{-n\kappa_i - \beta_i t} + C_i^{\,n\kappa_i + \beta_i t}$$

mit

$$D_i^2 = B_i C_i \qquad e^{\delta_i} = \sqrt{\frac{C_i}{B_i}}\, e^{\kappa_i} \qquad \beta_i = \sinh \kappa_i$$

$$\kappa_i = \gamma - \gamma^{(i)}$$

(Da hier nur eine einfache Bäcklund-Transformation stattfand können wir die Lösung aus (4) auch einfach übernehmen).

Aus (7) ergibt sich dann:

$$e^{Q_n(1,2) - \gamma^{(1,2)}} = z_1 z_2 \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} \qquad (8)$$

$$\text{mit} \quad \varphi_n = \varphi_2(n)\, \varphi_1(n+1) - \varphi_1(n)\, \varphi_2(n+1) \qquad (9)$$

An dieser Stelle merkt man, dass sich der Index fehler, der zur Gleichung ~~Lösung~~ (7) geführt hat, auf die Lösung ~~φ_n~~ nur marginal auswirkt. (8) würde folgendermaßen aussehen

$$e^{Q_{n-1}(1,2) - \gamma^{(1,2)}} = z_1 z_2 \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n+1}}$$

$$\text{mit} \quad \varphi_n = \varphi_2(n)\, \varphi_1(n+2) - \varphi_1(n)\, \varphi_2(n+2)$$

Soetwas wird nicht die Grundstruktur der Lösung vollkommen verändern.

Aus (8) ergibt sich:

$$e^{-\left(Q_{n+1}^{(1,2)} - Q_n^{(1,2)}\right)} = \frac{\varphi_{n+2}\,\varphi_n}{\varphi_{n+1}^2}$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen folgt für φ_n aus (9):

$$\varphi_n = 2D_+ \cosh\left[(n-1)(k_2+k_1) + (\beta_2+\beta_1)t + \delta_+\right]$$
$$+ 2D_- \cosh\left[(n-1)(k_2-k_1) + (\beta_2-\beta_1)t + \delta_-\right]$$

mit

$$\left.\begin{aligned} 0 < 2D_+^2 &= -4D_1 D_2 \sinh^2(k_2-k_1) \\ 0 < 2D_-^2 &= -4D_1 D_2 \sinh^2(k_2+k_1) \end{aligned}\right\} (10)$$

(hier gilt prinzipiell $0 \leq 2D_\pm^2$, aber $0 = 2D_-^2$ ist trivial und nach Möglichkeit haben wir in den Transformationen $Q_n^{(0)} \to Q_n^{(1)}$ bzw. $Q_n^{(0)} \to Q_n^{(2)}$ zwei nichttriviale Transformation gewählt, die sich voneinander unterscheiden $\Rightarrow D_1, D_2 \neq 0 \quad k_1 \neq k_2$, womit folgt $0 < 2D_\pm^2$).

$$e^{2\delta_+} = -\frac{C_1\,C_2}{B_1\,B_2}\, e^{3(k_1+k_2)}$$

$$e^{2\delta_-} = -\frac{C_1\,C_2}{B_1\,B_2}\, e^{3(k_2-k_1)}$$

Damit (10) erfüllt ist, müssen D_1 und D_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Folglich erhalten wir für $Q_n^{(1,2)}$ eine Zwei-Solitonen-Lösung, wenn von $Q_n^{(1)}$ und $Q_n^{(2)}$ genau einer eine Solitonenlösung und der andere eine Antisolitonenlösung repräsentiert.

Umgekehrt sind wir nicht daran gehindert aus der gewonnen Solitonenlösung durch Ändern von δ^+ und δ^- um $\frac{2\pi}{2i}$ eine Antisolitonenlösung zu generieren.

Durch wiederholtes Anwenden solcher Transformationen lassen sich dann auch Mehrsolitonenlösungen gewinnen, allerdings wird der Rechenaufwand (wie man (Z) ansieht) erheblich größer.