HAMILTON-JACOBI-FORMALISMUS I

Johannes Berger Leonard Stimpfle

05.06.2013

„Die Hauptschwierigkeit bei der Integration gegebener Differentialgleichungen scheint in der Einführung der richtigen Variablen zu bestehen, zu deren Auffindung es keine allgemeine Regel giebt. Man muss daher das umgekehrte Verfahren einschlagen und nach erlangter Kenntniss einer merkwürdigen Substitution die Probleme aufsuchen, bei welchem diesselbe mit Glück zu brauchen ist.“

C.G.J.Jacobi: VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK

Einleitendes. Ein mechanisches System kann mittels des Konfigurationsraumes M und der zugehörigen Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ beschrieben werden, wobei M als differenzierbare Mannigfaltigkeit, lokal parametrisiert durch Koordinaten $q^i,\ i = 1, \dots m = \dim M$, und $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R},\ \mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ als Abbildung auf dem Tangentialbündel aufgefasst wird.

Man betrachte nun zwei Karten $(\varphi_\alpha, TU_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, TU_\beta)$ auf TM mit nichtleerem Durchschnitt $\Omega_{\alpha\beta}$, wobei $\varphi_\alpha = (q^1_\alpha, \dots, q^m_\alpha, \dot{q}^1_\alpha, \dots, \dot{q}^m_\alpha)$. Die Koordinaten φ^i_β transformieren dann unter einem Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\Omega_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(\Omega_{\alpha\beta})$ mittels $\varphi^i_\beta = (\partial(\varphi^i_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})/\partial\varphi^j_\alpha)\varphi^j_\alpha$. Definiert man $p^\alpha_i := \partial_{\dot{q}^i_\alpha}\mathcal{L}(\varphi_\alpha)$, so zeigt

$$p^\beta_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i_\beta}\mathcal{L}\big(\varphi_\alpha(\varphi_\beta)\big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j_\alpha}\frac{\partial \varphi^j_\alpha}{\partial \dot{q}^i_\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\alpha}\underbrace{\frac{\partial q^j_\alpha}{\partial \dot{q}^i_\beta}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j_\alpha}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}^j_\alpha}{\partial \dot{q}^i_\beta}}_{=\partial q^j_\alpha/\partial q^i_\beta} = \frac{\partial q^j_\alpha}{\partial q^i_\beta}p^\alpha_j$$

das *kovariante Transformationsverhalten* der Komponenten p_i [2]. Deshalb wird p als Kovektor und die Transformation $\dot{q} \to p$ als Abbildung $TM \to T^*M$ aufgefasst. Das Kotangentialbündel $T^*M =: \mathcal{P}$ wird *Phasenraum* genannt, parametrisiert mittels $\{(q, p)\} = \{(q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m)\}$ und trägt damit die natürliche Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{P}, \omega^2)$, deren symplektische (d.h. nichtdegenerierte, geschlossene) 2-Form ω^2 lokal durch $\omega^2 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ gegeben ist[1].

[1]Diese nicht-triviale Aussage stellt der *Satz von Darboux* sicher. [1]

Kanonische Bewegungsgleichungen. Die kanonischen Bewegungsgleichungen können sowohl auf dem Phasenraum $\mathcal{P}$ als auch auf dem erweiterten Phasenraum $\mathcal{P}_t$ formuliert werden.

Auf dem Phasenraum $\mathcal{P}$ induziert die symplektische Struktur einen Isomorphismus $I^{-1} : T_x\mathcal{P} \to T_x^*\mathcal{P}$ durch $I^{-1}(v) := \omega_v^1 \in T_x^*\mathcal{P}$, wobei $\omega_v^1(w) := \omega^2(w, v)$ für alle $v, w \in T_x\mathcal{P}$. Sei nun $H \in C^\infty(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ eine glatte Funktion auf dem Phasenraum $\mathcal{P}$. Die äußere Ableitung $\mathrm{d} : \Omega^p(\mathcal{P}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{P})$ ordnet dieser Funktion eine 1-Form $\mathrm{d}H \in T^*\mathcal{P}$ zu, der wir mittels des oben angegebenen Isomorphismus I ein glattes Vektorfeld $I\mathrm{d}H \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ zuordnen können. Das Vektorfeld $I\mathrm{d}H$ wird das zur Hamiltonfunktion H gehöhrige *Hamiltonsche Vektorfeld* genannt und ist gegeben durch $\omega^2(I\mathrm{d}H, \cdot) = \mathrm{d}H$. Dieses Vektorfeld erzeugt eine lokale 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen $\varphi_t : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, den *Hamiltonschen Phasenfluss*, d.h. $\dot{\varphi}_t(x) = I\mathrm{d}H(\varphi(t))$. Die Integralkurven des Phasenflusses genügen dann den *kanonischen Gleichungen*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \text{und} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{1}$$

Der erweiterte Phasenraum $\mathcal{P}_t = \{(q, p, t)\}$ hat ungerade Dimension $\dim \mathcal{P}_t = 2n + 1$ und somit keine symplektische Struktur (mittels der wir (1) herleiten konnten). Jedoch führt auf $\mathcal{P}_t$ die 1-Form $\omega^1 \in \Omega^1(\mathcal{P})$, die lokal die Form $\omega^1 = p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t$ habe, auf die kanonischen Gleichungen (1): ω^1 besitzt in jedem Punkt $x \in \mathcal{P}_t$ eine eindeutige *Vortex-Richtung*[2] und die Vortex-Linien des zu dieser Richtung assoziierten Vektorfelds $X_\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{P}_t)$ sind wiederum die Integralkurven der kanonischen Gleichungen (1).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[d, "\omega^2"'] & & \mathcal{P}_t \arrow[d, "\omega^1"] \\ X_H \arrow[r] & (1) & X_\xi \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ABBILDUNG 1: Herleitung der kanonischen Gleichungen auf $(\mathcal{P}, \omega^2 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)$ bzw. $(\mathcal{P}_t, \omega^1 = p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t)$.

Deshalb ist ein Wechsel zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_t$ für das Lösen der kanonischen Bewegungsgleichungen (1) weitesgehend unproblematisch.

Kanonische Transformationen. Die Wahl der Koordinaten des Phasenraums ist als Parametrisierung einer Mannigfaltigkeit selbstverständlich nicht eindeutig. Besonders relevant für mechanische Probleme sind differenzierbare Abbildungen $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, die die symplektische 2-Form ω^2 erhalten, denn die kanonischen Gleichungen (1) sind in den transformierten Koordinaten *forminvariant* (cf. Satz 1). Sind transformierte Koordinaten Q^i *zyklisch*, so werden die Bewegungsgleichungen elementar lösbar. Der Hamilton-Jacobi-Formalismus führt mittels einer geeigneten Transformation das Lösen der kanonischen Gleichungen auf das Lösen der sogenannten *Hamilton-Jacobi-Gleichung*, die nun entwickelt wird.

Definition 1. Eine differenzierbare Abbildung $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *kanonische Transformation* (KT), wenn g die symplektische 2-Form ω^2 erhält, d.h. $g^*\omega^2 = \omega^2$.

---

[2] Zu einer nichtsingulären (d.h. $\dim(\{\xi \in T_x\mathcal{P}_t : \omega^2(\xi, \eta) = 0 \ \forall \eta \in T_x\mathcal{P}_t\}) = 1 =$minimal) 2-Form ω^2 auf einer $2n+1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{P}_t$ existiert in jedem Punkt $x \in \mathcal{P}_t$ eine eindeutige Richtung ξ_x, so dass $\omega^2(\xi_x, \eta) = 0$ für alle $\eta \in T_x\mathcal{P}_t$. Hier ist $\omega^2 = \mathrm{d}\omega^1$. [1]

Bemerkung 1. Die charakterisierende Eigenschaft einer KT, das Erhalten der symplektischen 2-Form ω^2, kann äquivalent auch als

$$\iint_\sigma \omega^2 = \iint_{g\sigma} \omega^2 \qquad \text{oder} \qquad \oint_{\partial\sigma} p\mathrm{d}q = \oint_{g\partial\sigma} p\mathrm{d}q$$

definiert werden.

Lemma 1. *Seien (Q,P,T) Koordinaten auf $\mathcal{P}_t$ und $K(Q,P,T)$, $S(Q,P,T)$ Funktionen, so dass $p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t = P\mathrm{d}Q - K\mathrm{d}T + \mathrm{d}S$. Dann sind die Integralkurven von (1) in der Karte (Q,P,T) gegeben durch die kanonischen Gleichungen*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \frac{\partial K}{\partial P}.$$

Sei $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(q,p) \mapsto \big(Q(q,p), P(q,p)\big)$ kanonisch und man betrachte die Funktionen $Q(q,p)$, $P(q,p)$ als transformierte Koordinaten von $\mathcal{P}$.

Satz 1. *In den transformierten Koordinaten (Q,P) hat (1) die Form $\dot{P} = -\partial_Q K$ und $\dot{Q} = \partial_P K$ mit der gleichen Hamiltonfunktion $K(Q,P,t) = H(q,p,t)$.*

Beweis. Man betrachte die 1-Form $p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$ auf $\mathcal{P}$. Dann ist für jede geschlossene Kurve $\partial\sigma : \mathbb{R} \to \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\sigma} p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q \quad &= \quad \int_\sigma \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \int_\sigma \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}Q \\ &\overset{g \text{ kanonisch}}{=} \int_\sigma \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \int_\sigma \underbrace{g^*(\mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}Q)}_{=\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q} = 0,\end{aligned}$$

d.h. $S(q_1,p_1) := \int_{q_0,p_0}^{q_1,p_1} p\mathrm{d}q - P(q,p)\mathrm{d}Q(q,p)$ hängt für festes (q_0,p_0) nur vom Endpunkt (q_1,p_1) ab. Das impliziert $\mathrm{d}S = p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$ und damit $p\mathrm{d}q - H\mathrm{d}t = P\mathrm{d}Q - H\mathrm{d}t + \mathrm{d}S$. Aus Lemma 1 folgt nun die Behauptung. ☐

Definition 2. In einer Umgebung U um (q_0,p_0) seien (q,Q) unabhängig, d.h. $\det(\partial_{(q,p)}(q,Q)) = \det(\partial_p Q) \neq 0$. Dann wird g *frei* genannt und die Funktion S wird *Erzeugende* von g genannt.

Insbesondere kann also die Erzeugende einer freien KT S auf U mittels $S(q,p) = S_1(q,Q)$ ausgedrückt werden.

Weiter ist nach Satz 1 eine Transformation g genau dann kanonisch, wenn die 1-Form $p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$ exakt ist,

$$p(q,Q)\mathrm{d}q - P(q,Q)\mathrm{d}Q \quad = \quad \mathrm{d}S_1(q,Q) \tag{2}$$

und damit gilt dann

$$\frac{\partial S_1(q,Q)}{\partial q} = p \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial S_1(q,Q)}{\partial Q} = -P. \tag{3}$$

Bemerkung 2. Nicht jede kanonische Transformation is frei. Zum Beispiel verschwindet die Funktionaldeterminante der Identitätstransformation ($q = Q$ mit Erzeugender $S_2(q,P) = qP$).

Im Allgemeinen ist eine Transformation $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ durch $2n$ Funktion (Q, P) von $2n$ Variablen (q, p) gegeben. Eine freie KT dagegen ist vollständig durch eine Funktion von $2n$ Variablen gegeben, der Erzeugenden S_1, d.h. jede Funktion S_1, die (2)erfüllt, ergibt vermittels (3) eine KT. Das zeigt der folgende

Satz 2. *Sei $S_1(q, Q)$ eine Funktion auf einer Umgebung U um (q_0, Q_0). Falls $\det\left(\partial_q \partial_Q S_1\right)\big|_{q_0,Q_0} \neq 0$, so ist S_1 die Erzeugende einer freien KT.*

Beweis. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann $\partial_q S_1(q, Q) = p$ in einer Umgebung um $\left(q_0, p_0 = \partial_q S_1(q, Q)\big|_{q_0,Q_0}\right)$ nach $Q(q, p)$ aufgelöst werden (weil nach Voraussetzung $\det(\partial_q \partial_Q S_1)|_{q_0,Q_0} \neq 0$). Sei nun $P_1(q, Q) := -\partial_Q S(q, Q)$ und $P(q, p) := P_1\big(q, Q(q, p)\big)$. Dann ist die Abbildung $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, gegeben durch $(q, p) \mapsto \big(Q(q, p), P(q, p)\big)$, eine KT mit Erzeugender S_1, denn die 1-Form $p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$ ist exakt,

$$p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q = \frac{\partial S(q, Q)}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial S(q, Q)}{\partial Q}\mathrm{d}Q = \mathrm{d}S(q, Q),$$

und wegen

$$\det\left(\frac{\partial^2 S(q, Q)}{\partial Q \partial q}\right)^{-1} = \det\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^{-1} = \det\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \neq 0$$

ist g frei. □

Man betrachte eine KT g, die die Hamiltonfunktion $H(q, p)$ auf die Form $K(Q)$ transformiert mit Erzeugender $S_1(q, Q)$. Mit (3) gilt dann

$$H\left(q, \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q}\right) = K(Q) \tag{4}$$

wobei nach Differentiation q durch $q(Q)$ ersetzt werde.

Definition 3. Die partielle Differentialgleichung 1.Ordnung (4) wird *Hamilton-Jacobi-Gleichung* genannt.

Das Lösen von (4), d.h. das Bestimmen einer geeigneten freien KT, ist einer Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen (1) äquivalent, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3 (Satz von Jacobi)**.** *Sei $S_1(q, Q)$ eine Lösung der Gleichung (4), so dass $\det(\partial_q \partial_Q S_1)|_{q_0,Q_0} \neq 0$. Dann sind die kanonischen Gleichungen (1) mittels Integration analytisch lösbar, wobei die Funktionen $Q(q, p)$ bestimmt und Erhaltungsgrößen von (1) sind.*[3]

Beweis. Sei g eine durch $S(q, Q)$ erzeugte KT. Dann wird $Q(q, p)$ mittels (3) bestimmt und die Hamiltonfunktion H wird in den transformierten Koordinaten durch $H(q, p) = H\big(q, \partial_q S(q, Q)\big)$ ausgedrückt wobei in den transformierten Koordinaten nach Voraussetzung[4] $q = q(Q)$ gilt, d.h. q ist unabhängig von P. Es folgt $H(q, p) = K(Q)$. □

[3]Arnold verwendet im Englischen den Begriff *first integral.*[1] Eine Lösung $I(t) = (q(t), p(t))$ der kanonischen Gleichungen (1) ist eine Kurve $I : \mathbb{R} \to \mathcal{P}$. Eine entlang dieser Kurve konstante Funktion $f(I(t))$ =const wird *first integral* genannt.

[4]$S(q, Q)$ löst (4).

Der Satz von Jacobi (Satz 3) führt das Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (1) auf das Lösen der Hamilton-Jacobi-Gleichung (4) zurück. Obwohl eine partielle Differentialgleichung oftmals schwerer als eine gewöhnliche zu lösen ist, existieren Probleme, die ausschließlich mittels des Hamilton-Jacobi-Formalismus' lösbar sind.

Literatur

[1] Arnold, V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer, zweite Auflage, 1989.

[2] Frankel, T.: *The Geometry of Physics: An Introduction.* Cambridge University Press, dritte Auflage, 2012.