Leibniz Universität Hannover
Institut für Theoretische Physik

Proseminar Theoretische Physik

Hamilton-Jacobi-Theorie II

Fabian Hartmann, Philip Schwartz

05.06.2013

0 Einleitung

Nachdem es im vorherigen Vortrag um die Theorie hinter der Hamilton-Jacobi-Methode ging, soll sie nun an Beispielen demonstriert werden.

Begonnen wird mit dem harmonischen Oszillator. Dann wird ein wenig Theorie über partielle Differentialgleichungen eingeführt, mit deren Hilfe dann die Anziehung durch zwei feste Zentren angegangen werden kann.

0.1 Erinnerung

Bei der Hamilton-Jacobi-Methode muss die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = K(Q, t) \tag{1}$$

in der Form $S(q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ gelöst werden.

Dann erhält man über $p = \frac{\partial S}{\partial q}, P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$ eine kanonische Transformation $(q, p) \mapsto (Q, P)$, sodass in den neuen Koordinaten $\dot{Q} = 0, \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q}$ gilt.

1 Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator wird durch die Hamiltonfunktion

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{D}{2}q^2$$

beschrieben. Als zu lösende Hamilton-Jacobi-Gleichung ergibt sich also

$$K = H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{D}{2}q^2. \tag{2}$$

Da H nicht (explizit) zeitabhängig ist, ist $H = K$ eine Erhaltungsgröße; es kann also $Q = K = H$ gewählt werden. Damit erhält man einerseits $\dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q} = 1$, also $P(t) = P_0 + t$.

Andererseits wird aus (2) damit $\frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mQ - Dmq^2}$, also

$$S(q, Q) = \int \mathrm{d}q \sqrt{2mQ - Dmq^2}.$$

Für die neuen Impulse ergibt sich daraus die Formel

$$\begin{aligned}
P = -\frac{\partial S}{\partial Q} &= -\int \mathrm{d}q \frac{m}{\sqrt{2mQ - Dmq^2}} \\
&= -\sqrt{\frac{m}{2Q}} \int \mathrm{d}q \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{D}{2Q}q^2}} \\
(\tilde{q} := \sqrt{\tfrac{D}{2Q}}q) \qquad &= -\sqrt{\frac{m}{D}} \int \mathrm{d}\tilde{q} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{q}^2}} \\
&= -\sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin(\tilde{q}) = -\sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{D}{2Q}}q\right)
\end{aligned}$$

(würde man hier noch $Q = H$ einsetzen, erhielte man die explizite Transformation $P(p, q)$).

Umgestellt erhält man $q = \sqrt{\frac{2Q}{D}} \sin\left(-\sqrt{\frac{D}{m}} P\right)$, also

$$q(t) = \sqrt{\frac{2Q}{D}} \sin\left(-\sqrt{\frac{D}{m}}(P_0 + t)\right).$$

Für p ergibt sich mit $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mQ - Dmq^2}$ (s.o.) schließlich

$$p(t) = \sqrt{2mQ}\sqrt{1 - \sin^2\left(-\sqrt{\frac{D}{m}}(P_0 + t)\right)} = \sqrt{2mQ} \cos\left(-\sqrt{\frac{D}{m}}(P_0 + t)\right),$$

und der harmonische Oszillator ist komplett gelöst.

2 Partielle Differentialgleichungen – separable Variablen

Wir betrachten allgemeine partielle Differentialgleichungen (PDGl) erster Ordnung

$$\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = 0. \tag{3}$$

Definition. Eine Lösung $S(q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ von (3), die von n (unabhängigen) Parametern Q_i abhängt, heißt *vollständiges Integral* der Gleichung (so viele zusätzliche Parameter wie Variablen, nach denen abgeleitet wird).

Definition. Wenn in einer PDGl die Variable q_1 und die Ableitung $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ nur in einer bestimmten Kombination $\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)$ auftreten, also

$$\left(0 \stackrel{!}{=}\right) \Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = \Phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_2, \ldots, q_n, \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)\right), \tag{4}$$

dann heißt q_1 eine *separable Variable.*

Satz. Sei q_1 separabel; und sei $S'(q_2, \ldots, q_n, c, Q_2, \ldots, Q_n)$ ein vollständiges Integral der Gleichung

$$\Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, \ldots, q_n, c\right) = 0$$

(Notation wie bei (4)). Außerdem sei $S_1(q_1, c)$ eine Lösung von $\varphi\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1\right) = c$ (das ist einfach zu lösen, denn das ist nur eine gewöhnliche DGl! → „nur“ integrieren).

Dann ist

$$S(q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_n) := S_1(q_1, Q_1) + S'(q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

ein vollständiges Integral der ursprünglichen PDGl.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n},q_1,\dots,q_n\right) &= \Phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n},q_2,\dots,q_n,\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},q_1\right)\right)\\
\text{(Def. von } S\text{)} \quad &= \Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial S'}{\partial q_n},q_2,\dots,q_n,\varphi\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1},q_1\right)\right)\\
\text{(Vorauss. an } S_1(q_1,Q_1)\text{)} \quad &= \Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial S'}{\partial q_n},q_2,\dots,q_n,Q_1\right)\\
\text{(Vorauss. an } S'\text{)} \quad &= 0
\end{aligned}$$

□

Wenn also in einer PDGl ($\Phi_1(\dots) = 0$) eine Variable separabel ist, muss man nur noch ein vollständiges Integral einer Gleichung mit einer Variable weniger ($\Phi_2(\dots) = 0$) finden, um ein vollständiges Integral der ursprünglichen Gleichung zu erhalten.

Ist nun in der neuen Gleichung wieder eine Variable separabel, so lässt sich die Variablenanzahl weiter reduzieren.

Im besten Fall sind alle Variablen separabel. Dann heißen die Variablen auch *komplett separabel*, und man erhält ein vollständiges Integral der Form

$$S(q,Q) = S_1(q_1,Q_1) + S_2(q_2,Q_1,Q_2) + \ldots + S_n(q_n,Q_1,\dots,Q_n),$$

wobei jedes S_i Lösung einer gewöhnlichen DGl ist.

3 Anziehung durch zwei feste Zentren

Nun wollen wir das Problem der Anziehung einer Punktmasse durch zwei feste Punktmassen betrachten (z.B. Gravitation, Coulombkraft, ...). Dies stellt z.B. eine gute Näherung dar, wenn die Bahnen von Körpern im Gravitationsfeld der Erde berechnet werden sollen, da die Erde ja keine Kugel, sondern eher ein Ellipsoid ist, und dementsprechend besser durch *zwei* als durch eine Punktmasse angenähert wird.

3.1 Wahl von Koordinaten & Aufstellen der Hamiltonfunktion

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Problems in der Ebene mit zwei Zentren gleicher Masse. Diese seien an den Punkten O_1 und O_2 festgehalten und haben zueinander den Abstand $2c$. Der sich bewegende Punkt habe Masse 1; sein Abstand zum Zentrum O_1 sei mit r_1 bezeichnet, der zum Zentrum O_2 mit r_2.

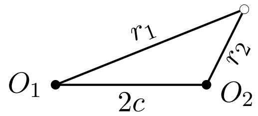

Abbildung 1: Anziehung durch zwei Zentren

Als Koordinaten verwenden wir $\xi := r_1 + r_2, \eta := r_1 - r_2$, sogenannte *elliptische Koordinaten*. Die Kurven, auf denen ξ konstant ist, sind Ellipsen mit den Brennpunkten O_1, O_2; die Kurven, auf denen η konstant ist, sind Hyperbeln mit diesen Brennpunkten.

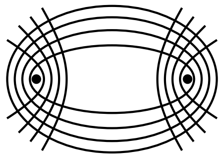

Abbildung 2: Ellipsen und Hyperbeln mit gleichen Brennpunkten

Wir wollen nun einen Ausdruck für die kinetische Energie sowie die konjugierten Impulse in elliptischen Koordinaten herleiten.

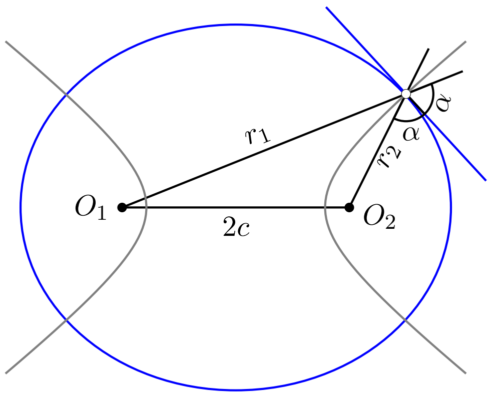

Abbildung 3: Übersichtsgrafik

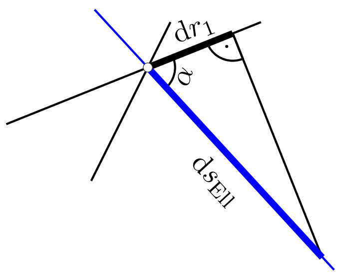

Abbildung 4: Bewegung um $\mathrm{d}s_{\mathrm{Ell}}$ entlang einer Ellipse (vergrößert)

Bei Bewegung entlang einer Ellipse gilt $r_1 + r_2 = \text{const.}$ und damit $\mathrm{d}r_2 = -\mathrm{d}r_1$. Über $\mathrm{d}r_1 = \mathrm{d}s_{\mathrm{Ell}} \cos\alpha$ (Abbildung 4) folgt daraus $\mathrm{d}\eta = 2\cos\alpha \mathrm{d}s_{\mathrm{Ell}}$. D.h. $\mathrm{d}s_{\mathrm{Ell}} = \frac{1}{2\cos\alpha}\mathrm{d}\eta$.

Bei Bewegung entlang einer Hyperbel gilt $r_1 - r_2 = \text{const.}$ und damit $\mathrm{d}r_2 = \mathrm{d}r_1$. Über $\mathrm{d}r_1 = \mathrm{d}s_{\mathrm{Hyp}} \sin\alpha$ (Abbildung 5) folgt daraus $\mathrm{d}\xi = 2\sin\alpha \mathrm{d}s_{\mathrm{Hyp}}$. D.h. $\mathrm{d}s_{\mathrm{Hyp}} = \frac{1}{2\sin\alpha}\mathrm{d}\xi$.

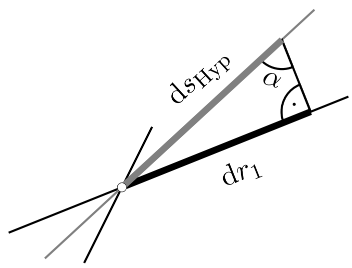

Abbildung 5: Bewegung um $\mathrm{d}s_{\mathrm{Hyp}}$ entlang einer Hyperbel (vergrößert)

Da die Ellipsen und Hyperbeln jeweils senkrecht aufeinander stehen, ist damit (Pythagoras)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_{\mathrm{Ell}}^2 + \mathrm{d}s_{\mathrm{Hyp}}^2 = \frac{1}{4\sin^2\alpha}\mathrm{d}\xi^2 + \frac{1}{4\cos^2\alpha}\mathrm{d}\eta^2.$$

Aus dem Dreieck O_1MO_2 (M ist die bewegliche Masse) erhalten wir (Kosinussatz bzw. Länge der Vektoren, s. Abbildung 3) $r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(2\alpha) = 4c^2$, also

$$\frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Mit

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \frac{2r_1r_2}{2r_1r_2}$$

erhält man daraus

$$\cos^2\alpha = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2}{4r_1r_2} = \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2}$$

und

$$\sin^2\alpha = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4r_1r_2}.$$

Damit ist eingesetzt

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}\mathrm{d}\xi^2 + \frac{r_1r_2}{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}\mathrm{d}\eta^2.$$

Allgemein ist für $\mathrm{d}s^2 = \sum a_i^2 \mathrm{d}q_i^2$ die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\sum a_i^2 \dot{q}_i^2$, also sind die Impulse (für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale) $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = a_i^2 \dot{q}_i$ und damit $T = \sum \frac{p_i^2}{2a_i^2}$.

In unserem Fall ist also

$$T = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{2r_1r_2}p_\xi^2 + \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_1r_2}p_\eta^2.$$

Mit den Definitionen von ξ, η sowie $\xi^2 - \eta^2 = 4r_1r_2$ und dem (zu beiden Zentren anziehenden) Potential $V = -\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} = -\frac{k(r_1+r_2)}{r_1r_2}$ (k enthält die Massen und Proportionalitätskonstanten) folgt nun

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = T + V = \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} 2p_\xi^2 + \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} 2p_\eta^2 - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

3.2 Anwendung der Hamilton-Jacobi-Methode

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die gelöst werden muss, ist

$$K = \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} 2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} 2\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Umgestellt erhält man

$$\begin{aligned} & (\xi^2 - 4c^2)2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + (4c^2 - \eta^2)2\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 - 4k\xi = K(\xi^2 - \eta^2) \\ \iff \quad & (\xi^2 - 4c^2)2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 - 4k\xi - K\xi^2 + (4c^2 - \eta^2)2\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + K\eta^2 = 0 \\ \iff \quad & \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}, \xi\right) + (4c^2 - \eta^2)2\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + K\eta^2 = 0 \end{aligned}$$

mit entsprechend gewähltem φ; die Variablen sind also komplett separabel.

Es muss also die Gleichung

$$(\xi^2 - 4c^2)2\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2 - 4k\xi - K\xi^2 = Q_1$$

gelöst und ein vollständiges Integral von

$$Q_1 + (4c^2 - \eta^2)2\left(\frac{\partial S'}{\partial \eta}\right)^2 + K\eta^2 = 0$$

gefunden werden; dann ist $S = S_1 + S'$. Da H nicht zeitabhängig ist, kann K für Q_2 gewählt werden. Damit sind Q_1, Q_2, P_1 konstant, und $\dot{P}_2 = 1$.

Man erhält direkt

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2\xi^2 + 4k\xi}{2(\xi^2 - 4c^2)}}$$

und

$$\frac{\partial S'}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{-Q_1 - Q_2\eta^2}{2(4c^2 - \eta^2)}}.$$

Diese Gleichungen kann man direkt durch Integrieren lösen; damit ergibt sich

$$S(\xi, \eta, Q_1, Q_2) = \int \mathrm{d}\xi \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2\xi^2 + 4k\xi}{2(\xi^2 - 4c^2)}} + \int \mathrm{d}\eta \sqrt{\frac{-Q_1 - Q_2\eta^2}{2(4c^2 - \eta^2)}}.$$

Durch Ableiten nach Q_1, Q_2 können daraus Integralausdrücke $P_1(p, q), P_2(p, q)$ bestimmt werden; dadurch können schließlich Ausdrücke $\xi(P, Q), \eta(P, Q)$ und somit $\xi(t), \eta(t)$ bestimmt werden.