Integrabilität und invariante Tori

3.Vortrag: Proseminar "Theoretische Physik"

Marius Schulte und Sabrina Schulz

24. April 2013

1 Einführung und Motivation

1.1 wichtige Begriffe

Im Folgenden, wie auch schon in den vorherigen Vorträgen, betrachten wir die Bewegung eines physikalischen Problems im Hamilton Formalismus.

1.1.1 Integrabilität

Im Allgemeinen kann ein System mit n Freiheitsgraden $k \leq n$ Erhaltungsgrößen haben. Diese zeitlich erhaltenden Größen kann man durch k differenzierbare Funktionen ausdrücken. Die Bahnkurven, durch die Anfangsbedingungen bestimmt, bleiben dann auf (n-k)-dim Untermannigfaltigkeiten des Phasenraums.
Die Kenntnis von k Erhaltungsgrößen reduziert also die Anzahl der Freiheitsgrade um k.

Ein Hamilton-System heißt *vollständig integrierbar*, wenn es n Erhaltungsgrößen gibt.
Im Folgenden werden wir dieses genauer untersuchen.

1.1.2 Erhaltungsgrößen

Sei die Funktion F eine Erhaltungsgröße. Dann verschwindet die Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion:

$$\{H, F\} = 0 \tag{1}$$

Zwei Erhaltungsgrößen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit stehen zueinander *in Involution*, wenn deren Poisson-Klammer verschwindet:

$$\{F_i, F_j\} = 0 \qquad i, j = 1, ..., n \tag{2}$$

1.1.3 1-Parameter-Gruppen

Zu jedem Vektorfeld haben wir eine 1-Parameter-Gruppe, also einen Diffeomorphismus g^t mit den Eigenschaften:

$$g^{t+s} = g^t g^s \qquad und \qquad g^0 = id \tag{3}$$

2 Liouville (-Arnold) Theorem

Liouville hat bewiesen:

Kennen wir in einem System mit n Freiheitsgraden (d.h. mit 2n-dim Phasenraum) n unabhängige *first integrals* (Erhaltungsgrößen), so ist das System mit Quadraturen integrabel.

Genauer formuliert lautet das Theorem:

Angenommen:
Wir haben n Funktionen, welche *in Involution* zueinander sind, auf einer symplektischen 2n-dim Mannigfaltigkeit.

$$F_1, ..., F_n \qquad \{F_i, F_j\} = 0 \qquad i, j = 1, ..., n \tag{4}$$

Wir betrachten das *level set* der Funktionen F_i

$$M_f = \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, ..., n\} \tag{5}$$

Wir nehmen an, dass die n Funktionen F_i unabhängig auf M_f sind (d.h. die n 1-Formen dF_i sind linear unabhängig an jedem Punkt auf M_f).
Dann gilt:

1.)M_f ist eine glatte Mannigfaltigkeit und invariant unter dem Phasenfluss mit der Hamilton-Funktion $H = F_1$

2.) Wenn die Mannigfaltigkeit M_f kompakt und zusammenhängend ist, dann ist sie diffeomorph zu dem n-dim Torus

$$T^n = \{(\phi_1, ..., \phi_n) \; mod \; 2\pi\} \tag{6}$$

3.)Der Phasenfluss mit der Hamilton-Funktion H bestimmt eine bedingt periodische Bewegung auf M_f, d.h. in Winkelkoordinaten $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, ..., \phi_n)$

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{f}) \tag{7}$$

4.)Die Kanonischen Gleichungen mit der Hamilton Funktion H können mit Quadraturen integriert werden.

2.1 Anmerkung

Ein n-dim Torus, wie durch Gleichung (6) beschrieben, wird durch n Kreise S^1 aufgespannt:

$$T^n = S^1 \times ... \times S^1 \; (n - mal) \tag{8}$$

3 Beispiele

3.1 Harmonischer Oszillator

3.2 zwei Dimensionen

3.3 Kreisel

4 Beweis

Wir betrachten das *level set* M_f der Integrale. Unter dieser Annahmen sind die 1-Formen dF_i linear unabhängig an jedem Punkt von M_f; mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass M_f eine n-dim Untermannigfaltigkeit des 2n-dim Phasenraums ist.

4.1 Lemma 1

Auf einer n-dim Mannigfaltigkeit M_f existeren n Tangentialvektorfelder, welche untereinander kommutieren und linear unabhängig sind.

Beweis:
Die symplektische Struktur des Phasenraums definiert einen Operator I (s. Vortrag 1 Abschnitt 3.2), welcher die 1-Formen dF_i auf Vektorfelder abbildet und die dF_i zu IdF_i auf die Phasengeschwindigkeiten des Systems mit Hamilton-Funktion F_i transportiert.

zz: Die n Vektorfelder IdF_i

i sind tangential zu M_f

ii kommutieren untereinander

iii und sind linear unabhängig

Beweis:

ii Nach Voraussetzung gilt: $\{F_i, F_j\} = 0$
=> $\{IdF_i, IdF_j\} = 0$, d.h. die Vektorfelder kommutieren.

i Ebenfalls wegen $\{F_i, F_j\} = 0$ ist die Ableitung der Funktionen F_i in die Richtung des Vektorfeldes IdF_j Null für alle $i, j = 1, ..., n$, d.h. die Felder IdF_i liegen tangential an M_f.

iii Nach Vorraussetzung sind die dF_i linear unabhängig. Außerdem ist I als Isomorphismus nicht-singulär, d.h. invertierbar. Daraus folgt die lineare Unabhängigkeit der Vektorfelder IdF_i.

Folgerungen aus Lemma 1

I M_f ist invariant unter Berücksichtigung der kommutierenden Phasenflüsse g_i^t mit der Hamilton Funktion $F_i : g_i^t g_j^s = g_j^s g_i^t$.

II M_f ist "Null", d.h. auch die 2-Form ω^2 verschwindet auf $T|_x M_f$.

Dieses gilt, solange die n Vektoren $IdF_i|_x$ schief-symmetrisch zueinander sind ($\{F_i, F_j\} = 0$) und eine Basis der Tangentialfläche von M_f im Punkt x aufspannen.

4.2 Lemma 2 -Teil I-

Sei M^n eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit (dim n), mit n paarweise kommutierenden, in jedem Punkt linear unabhängigen Vektorfeldern, so ist M^n diffeomorph zu einem n-dim Torus.

Beweis:

- Betrachte die n 1-Parameter-Gruppen $g_i^t, i = 1, ..., n$ zu den gegebenen Vektorfeldern (g_i^t, g_j^s vertauschen)
- Auf M^n ist $g^t : M^n \to M^n \qquad g^t = g_1^{t_1} \ ... \ g_n^{t_n} \qquad (\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n)$
- Dadurch erhalten wir eine Karte von M^n mit $g : \mathbb{R}^n \to M^n \qquad g(t) = g^t x_0$
- Die Abbildung g ist nicht injektiv, da M^n kompakt ist, $\mathbb{R}^n$ aber nicht.
  => Wir betrachten nur noch die Urbildpunkte von $x_0 \in M^n$

  Dies führt zu Definition der stationären Gruppe:

Definition
Die *stationäre Gruppe* von x_0 ist $\Gamma := \{t \in \mathbb{R}^n : g^t x_0 = x_0\}$.
Γ ist eine wohldefinierte Untergruppe des $\mathbb{R}^n$, unabhängig von der Wahl von x_0. Mit $t = 0 \in \Gamma$.

- Die Punkte $t \in \Gamma$ liegen diskret in $\mathbb{R}^n$(d.h. in einer Umgebung $t + V$ um $t \in \Gamma$ liegt kein weiterer Punkt von Γ). Wir nennen Γ eine *diskrete Untergruppe* .

4.3 Lemma 3

Sei Γ eine diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^n$. Dann existieren k $(0 \leq k \leq n)$ linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_k} \in \Gamma$, sodass Γ von diesen aufgespannt wird als Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten.

Beweis
Sei $\mathbb{R}^n$ eine beliebige euklidische Struktur. Wir wählen Γ so, dass der Ursprung immer in Γ liegt $\mathbf{0} \in \Gamma$.

Wenn $\Gamma = \{\mathbf{0}\}$, gibt es nichts weiter zu beweisen und wir sind fertig.

Wenn es aber einen weiteren Punkt $\boldsymbol{e_0} \in \Gamma$, $\boldsymbol{e_0} \neq \mathbf{0}$ gibt, können wir eine Linie konstruieren $\mathbb{R}\boldsymbol{e_0}$. Wir betrachten einen Kreis um den Ursprung mit Radius $|\boldsymbol{e_0}|$; innerhalb dieses Kreises liegt nur eine endliche Menge von Punkten, denn Γ ist eine diskrete Untergruppe, d.h. also insb. nicht kontinuierlich. Wir wählen den Punkt aus, der dem Ursprung am nächsten ist, aber auf der Verbindungslinie liegt. Dies sei $\boldsymbol{e_1}$. Die Punkte $m\boldsymbol{e_1}, m \in \mathbb{Z}$ teilen die Linie auf in Teilstücke mit der Länge $|\boldsymbol{e_1}|$. Es ist nicht möglich einen Punkt zwischen $m\boldsymbol{e_1}$ und $(m+1)\boldsymbol{e_1}$ zu finden, denn durch eine geeignete Verschiebung um $-m\boldsymbol{e_1}$ läge der Punkt näher am Ursprung als $\boldsymbol{e_1}$. Wenn es keine weiteren Punkte außerhalb der Linie gibt, sind wir fertig.

Angenommen es gibt einen weiteren Punkt $\boldsymbol{e} \in \Gamma, \boldsymbol{e} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{e_1}$. Sei $\boldsymbol{e_2} \in \Gamma$ derjenige Punkt, der der Linie $\mathbb{R}\boldsymbol{e_1}$ am nächsten ist, aber nicht auf der Linie $\mathbb{R}\boldsymbol{e_1}$ liegt $\boldsymbol{e_2} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{e_1}$. Wir projizieren $\boldsymbol{e}$ orthogonal auf $\mathbb{R}\boldsymbol{e_1}$ und bezeichnen die dadurch entstehende Linie mit $\mathbb{R}\boldsymbol{e_2}$.

Die Linearkombination von $\boldsymbol{e_1}$ und $\boldsymbol{e_2}$ spannt ein Gitter in der Ebene
$\mathbb{R}\boldsymbol{e_1} + \mathbb{R}\boldsymbol{e_2}$ auf. Liegen keine weiteren Punkte außerhalb der Ebene, so sind wir fertig, andernfalls verfahren wir wie zuvor...

Anzumerken bleibt, dass alle Vektoren $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ...$ linear unabhängig sind und im $\mathbb{R}^n$ liegen. Es gibt $k \leq n$ von ihnen.

4.4 Lemma 2 -Teil II-

Wir beweisen jetzt Lemma 2: M_f ist diffeomorph zum Torus T^n.
Betrachten wir also das Produkt

$$T^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{(\phi_1, ..., \phi_k; y_1, ..., y_{n-k})\} \qquad \boldsymbol{\phi} \; mod \; 2\pi \tag{9}$$

Wir erhalten eine geeignete Karte für $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch $\mathbb{R}^n = \{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{y})\}$ mit
$p : \mathbb{R}^{n-k} \to T^k \times \mathbb{R}^{n-k} \qquad p(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\phi} \; mod \; 2\pi, y)$
Weiterhin ist A ein Isomophismus, der die Vektoren $\boldsymbol{f_i} \in \mathbb{R}^n$ ($\boldsymbol{f_i}$ hat die Koordinaten $\phi_i = 2\pi, \phi_j = 0, \boldsymbol{y} = 0$) auf die Vektoren $\boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^n$ abbildet (s. Lemma 3)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n = \{(\varphi, y)\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^n = \{t\} \arrow[d, "g"] \\
T^k \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[r, "\tilde{A}"] & M_f
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1

Da M_f kompakt ist gilt k=n und M_f ist ein n-dim Torus.

5 Ausblick

Wie wir gesehen haben ist dieses Thema von großer Bedeutung.
Im weiteren Verlauf des Seminars wird uns das Thema immer wieder begegnen:
- Winkelwirkungsvariabeln
- KAM-Theorem