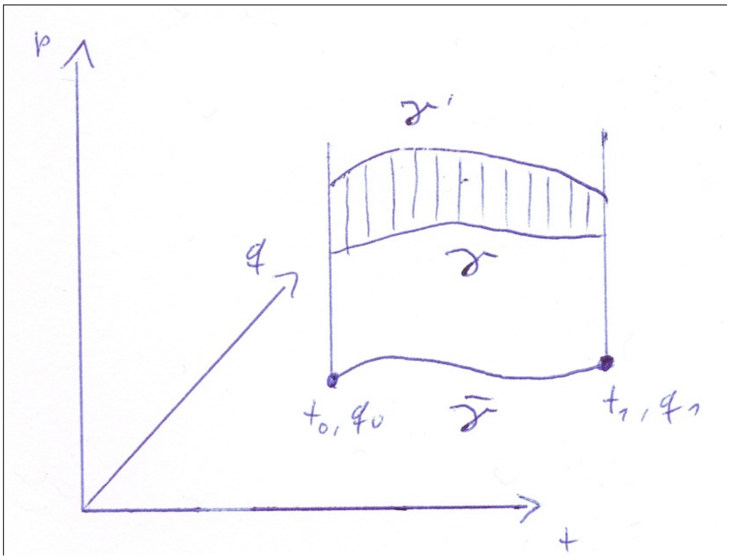
4. Das Prinzip der kleinsten Wirkung

4.1 Das Prinzip der kleinsten Wirkung im Phasenraum

Man nehme eine Integralkurve der kanonischen Gleichungen im erweiterten Phasenraum zwischen den Punkten (p_0, q_0, t_0) und (p_1, q_1, t_1).

Satz: Für das Integral $\int pdq - Hdt$ ist die physikalische Bahn γ ein Extremal unter Variation von γ, wobei die Endpunkte von γ in den n-dimensionalen Unterräumen (t=t_0, q=q_0) und (t=t_1, q=q_1) liegen.



Beweis: Die Kurve γ ist eine Vortex-Kurve der Form p*dq-H*dt. Somit ist das Integral von p*dq-H*dt über ein infinitesimal kleines Flächenstück entlang der Vortex-Richtung null.

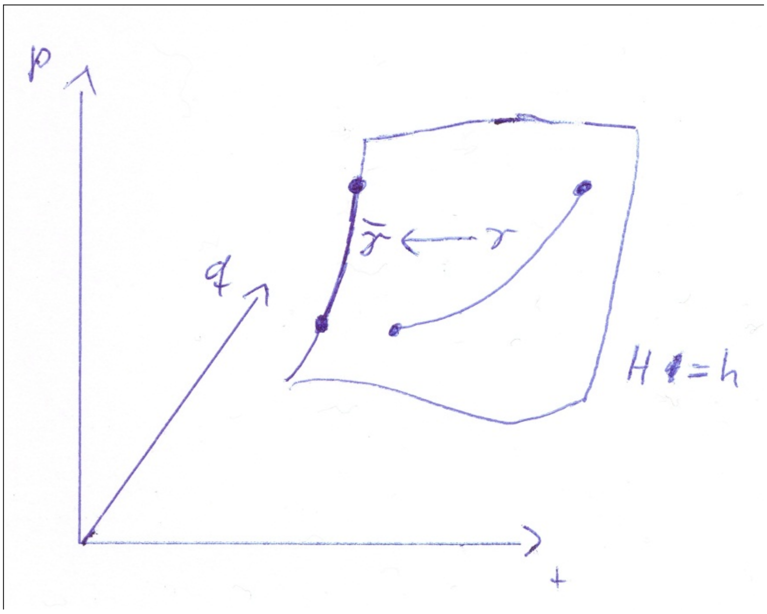
Oder man kann leicht berechnen, dass nur solche Kurven Extrema des Integrals $\int pdq - Hdt$ sind, die den kanonischen Gleichungen genügen:

$$\delta \int_\gamma (p\dot{q} - H)dt = \int_\gamma (\dot{q}\,\delta p + p\delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q)dt = \mathrm{p}\delta q| + \int_\gamma \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p - (\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q})\delta q\right] dt$$

4.2 Das Prinzip der kleinsten Wirkung (Maupertuis-Euler-Lagrange-Jacobi-Form)

4.2.1. Formulierung

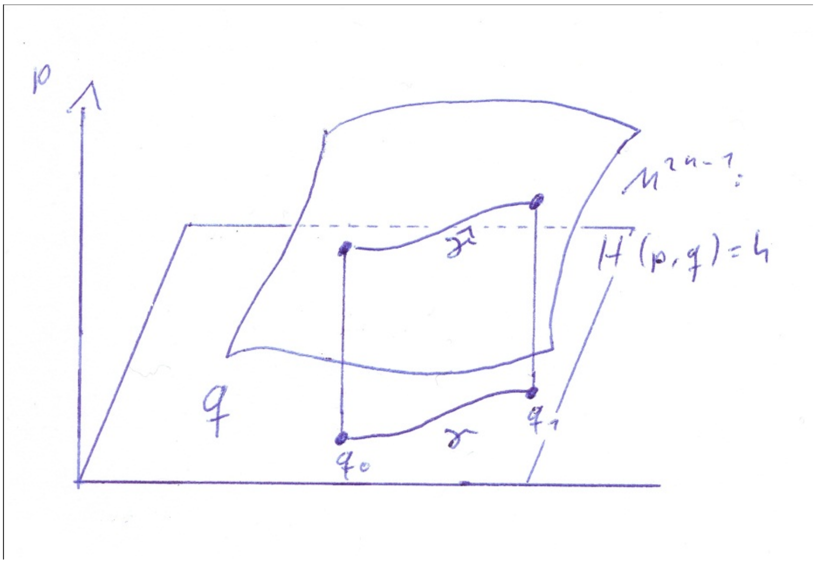
Es sei die Hamilton-Funktion H(p,q) zeitunabhängig. Dann ist H(p,q) ein erstes Integral der Hamilton´schen Gleichungen mit H(p,q)=h. Wir projezieren die Fläche H(p,q)=h vom erweiterten Phasenraum {(p,q,t)} auf den Phasenraum {(p,q)} (Abbildung). Somit erhält man eine (2n-1)-dimensionale Fläche H(p,q)=h (im folgenden M^{2n-1}) im R^{2n}. Die Phasen-Trajektorien der kanonischen Gleichungen, die in M^{2n-1} beginnen, liegen auch komplett in M^{2n-1} (ohne Beweis).



Sie sind Vortex-Kurven der Form $p * dq$. Diese Kurven sind Extrema des Variationsprinzips (ebenfalls ohne Beweis).

Satz: Hängt die Hamilton-Funktion H(p,q)=h nicht von der Zeit ab, so sind die Phasentrajektorien der kanonischen Gleichungen auf der Oberfläche M^{2n-1}:H(p,q)=h Extrema des Integrals $\int pdq$ in der Familie der Kurven auf M^{2n-1} zwischen den Unterräumen q=q_0 und q=q_1.

Man projeziere nun eine extremale $\hat{\gamma}$ Kurve aus M^{2n-1}:H(p,q)=h und projeziere sie auf den Konfigurationsraum (q-Raum). Sei γ eine weitere Kurve zwischen q_0 und q_1, so ist γ die Projektion einer Kurve $\hat{\gamma}$ auf M^{2n-1}.



(Anmerkung: Die „Grundfläche“ in dieser Skizze zeigt den q-Raum)

Man parametrisiere γ so, dass a≤ τ ≤b, γ(a)= q_0, γ(b)= q_1. Dann lässt sich an jedem Punkt ein Geschwindigkeitsvektor $\dot{q}$=$\frac{d\gamma}{d\tau}$ und ein korresponierdender Impuls p=$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ aufstellen. Ist der Parameter t so gewählt, dass H(p,q)=h, erhalten wir eine Kurve $\hat{\gamma}$: q=$\gamma(\tau)$, p=$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ auf M^{2n-1}.

Korollar: Unter allen Kurven q=$\gamma(\tau)$ zwischen q_0 und q_1 auf dem Konfigurationsraum (q-Raum), die so parametrisiert sind, dass H($\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, q)=h, ist die Bahn, die den kanonischen Gleichungen genügt, ein Extremal des Integrals der reduzierten Wirkung:

$\int_\gamma \; pdq = \int_\gamma \; p\,\dot{q}d\tau = \int_\gamma \; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau)\dot{q}(\tau)d\tau$

Dies ist das Prinzip der reduzierten Wirkung in der **Maupertuis-Form.**

4.2.2 Prinzip der kleinsten Wirkung (Maupertuis-Form) auf glatten riemann´schen Mannigfaltigkeiten

Die Maupertuis-Form erweist sich als besonders einfache Formulierung für Systeme, deren inertiale Bewegung auf glatten riemann´schen Mannigfaltigkeiten verläuft.

Satz: Eine Punktmasse, die sich entlang einer glatten riemann´schen Mannigfaltigkeit bewegt, bewegt sich entlang geodätischer Linien.

Beweis:
Zunächst betrachten wir den Spezialfall U:=$E_{pot} = 0$:

Somit gilt H=L=T=$\frac{1}{2}(\frac{ds}{d\tau})^2$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T = (\frac{ds}{d\tau})^2$

Um H(p,q)=h zu garantieren, muss der Parameter τ proportional zur Länge gewählt werden: $d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2h}}$

Dann folgt für das Integral der reduzierten Wirkung:

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}d\tau = \int_\gamma \sqrt{2h}\,ds = \sqrt{2h}\int_\gamma ds$$

Damit sind die Extrema des Integrals der reduzierten Wirkung Geodäten auf der Mannigfaltigkeit, q.e.d..

Für den Fall U≠0 sind die Extrema ebenfalls Geodäten, allerdings nur für bestimmte riemann´sche Metriken:

Sei ds^2 eine riemann´sche Metrik auf dem Konfigurationsraum (q-Raum), sodass $T = (\frac{ds}{d\tau})^2$ und sei h=const..

Satz: Für Bereiche der Mannigfaltigkeit, mit U(q)<h definieren wir eine riemann´sche Metrik durch: $d\rho = \sqrt{h - U(q)}ds$.
Trajektorien des Systems mit $T = \frac{1}{2}(\frac{ds}{dt})^2$, U(q) und $h = E_{ges}$ sind Geodäten der Metrik $d\rho$.

Beweis:

Es gilt: $L = T - U, H = T + U, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T = (\frac{ds}{dt})^2 = 2(h - U)$. τ muss somit proportional zur Länge gewählt werden: $d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2(h-U)}}$ und es folgt für das Integral der reduzierten Wirkung:

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\,d\tau = \int_\gamma \sqrt{2(h-U)}ds = \sqrt{2}\int_\gamma d\rho$$

=>Die Extrema des Integrals sind Geodäten der Metrik $d\rho$, q.e.d..