

Stabilität von Gleichgewichtslagen

Sina Loriani Fard und Fabian Anders

3. Juli 2013

1 Prinzip der linearen Stabilität

1.1 Linearisierung

Im Folgenden untersuchen wir die Gleichgewichtslage eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems im \mathbb{R}^n . Dabei seien $x = (x^1, \dots, x^n)$ die Koordinaten und X ein beliebiges Vektorfeld mit Gleichgewichtslage x_G für die gilt $X(x_G) = 0$

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

Da uns nur eine Umgebung um die Gleichgewichtslage x_G interessiert, **linearisieren** wir mittels Taylor um eben diese.

$$\underbrace{X(x)}_{=\dot{x}=\xi} = \underbrace{X(x_G)}_{=0} + DX(x_G) \cdot \underbrace{(x - x_G)}_{=:\xi} + \mathcal{O}(x^2)$$

Damit erhalten wir mit $L := DX(x_G)$ das **linearisierte System**

$$\dot{\xi} = L\xi \tag{2}$$

mit dem zugehörigem Fluss

$$\Phi_t = e^{tL} \tag{3}$$

Dieser Fluss stellt die Lösung des linearisierten Systems in Abhängigkeit des Anfangszustands $x_{t=0} = x_0$ und der Zeit dar, d.h.:

$$\xi(x_0, t) = e^{tL(x_0)}$$

1.2 LjapunovStabilität

Def. 1

Eine Gleichgewichtslage x_G von X ist **stabil**

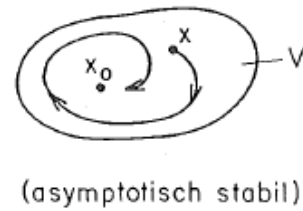
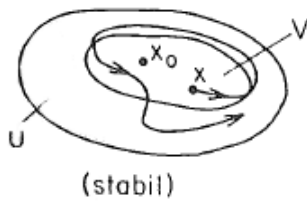
$:\Leftrightarrow$

\forall Umgebungen U von x_G und $V \subseteq U$ bleibt der Fluss $\Phi_t(x)$ mit $x \in V$ immer in U . Dies soll $\forall t \geq 0$ und $x \in V$ gelten.

Gilt zusätzlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x_G$$

ist x_G **asymptotisch stabil**.



Satz 1

Die triviale Lösung von $\dot{\xi} = L\xi$ (also hier für die Gleichgewichtslage $x = x_G \rightarrow \xi = 0$) ist **stabil** wenn gilt

(i) Das Spektrum $\sigma(L)$ in der linken komplexen Halbebene liegt, also $\text{Re } \sigma(L) \leq 0$ ist
(bei $\text{Re } \sigma(L) < 0$ **asymptotisch stabil**)

(ii) für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(L)$ mit $\text{Re } \lambda = 0$ gilt, dass seine algebraische Vielfachheit gleich der Geometrischen ist.

Beispiel 1 - Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}
 H(q, p) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \\
 \Rightarrow \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \\
 \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{+/-} = \pm i\omega
 \end{aligned}$$

Also wie zu erwarten: **stabil**.

Beispiel 2 - Gedämpfte Schwingung

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x} \quad ; \quad m, k, d > 0 \tag{4}$$

Zur Anwendung von *Satz 1* bringen wir die DGL in die Form $\dot{\xi} = L\xi$.

Reduktion der Ordnung:

Sei $u := m\dot{x}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{1}{m}u \\
 \dot{u} &= -kx - \frac{d}{m}u
 \end{aligned}$$

Mit $\xi := \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} \xi \\ \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -(\frac{d}{m} + \lambda) \end{pmatrix} &= \lambda \left(\frac{d}{m} + \lambda \right) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \lambda \frac{d}{m} + \frac{k}{m} = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{+/-} &= -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\end{aligned}$$

Es bleibt also die Frage, ob $\operatorname{Re} \lambda_+ < 0$ ist. Dafür muss gelten

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} &< \frac{d}{2m} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m} &< \frac{d^2}{4m^2} \\ \Rightarrow -\frac{k}{m} &< 0\end{aligned}$$

Dies gilt nach Voraussetzung.

Hier gilt also $\operatorname{Re} \sigma(L) < 0 \Rightarrow$ **asymptotisch stabil**.

Es ist also nützlich, weitere Eigenschaften von L bzgl. der Eigenwerte zu erfahren. Betrachte ab jetzt lineare Hamiltonsche Systeme (LHS). Wie wir schon wissen ist der Fluss $\Phi_t = e^{tL}$ eines LHS symplektisch. Untersuchen wir hier die Stabilität, können folgende Zusammenhänge helfen.

Satz 2

Sei L eine infinitesimale symplektische Transformation. Ist λ Eigenwert $\Rightarrow -\lambda, \bar{\lambda}$ und $-\bar{\lambda}$ sind Eigenwerte (mit selber Vielfachheit). Der Eigenwert $\lambda = 0$ hat gerade Vielfachheit.

Daher kann nach *Satz 1* ein LHS nur stabil sein, wenn alle Eigenwerte rein imaginär ($\operatorname{Re} \sigma(L) = 0$) sind. Die Ruhelage x_G heißt dann **Zentrum**.

Satz 2 macht keine Aussage über die asymptotische Stabilität, da eine infinitesimale Betrachtung in der Zeit den Limes gegen ∞ ausschließt.

Satz 3 (Prinzip der linearen Stabilität)

Gilt für die Gleichgewichtslage x_G des linearisierten System $\operatorname{Re}(DX(x_0)) < 0$, ist es in x_G asymptotisch stabil.

x_G ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil hat.

Beispiel 3 - gedrehtes Potential

$$\begin{aligned}H(q, p) &= \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ m\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{+/-} = \pm i\omega\end{aligned}$$

Wie zu erwarten folgt aus *Satz 3*: **instabil**.

Daher ist die lineare Stabilitätsanalyse insbesondere zum Nachweis von Instabilität oft ausreichend. Aus *Satz 3* folgt auch, dass nur Stabilität vorliegen kann, wenn x_G ein Zentrum ist. Ob ein LHS in einem Zentrum stabil ist, hängt dann oft von den Nichtlinearitäten ab.

Beispiel 4

$$\dot{x} = -y + ax^3, \quad \dot{y} = x + ay^3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$x_G = (0, 0)$ ist die Gleichgewichtslage. Wir betrachten zunächst den linearen Teil. Die Eigenwerte ergeben sich zu

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

x_G ist also ein Zentrum. Nun ist aber die zeitliche Änderung des Abstandes von $(0, 0)$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2a(x^4 + y^4)$$

Für $a > 0$ laufen die Orbits also auseinander \Rightarrow instabil,

für $a < 0$ in die Gleichgewichtslage hinein \Rightarrow stabil.

Hier benötigen wir also ein weiteres Werkzeug.

2 Ljapunov-Funktionen

Macht das *Prinzip der linearen Stabilität* keine Aussage, kann eine direkte Methode von Ljapunov helfen.

Def. 2

Eine **Ljapunovfunktion** einer Gleichgewichtslage x_G ist eine in der Umgebung U von x_G definierte, stetige Funktion $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $L(x_G) = 0$ und $L(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_G\}$

(ii) L ist stetig dfb. in $U \setminus x_G$ und

$$\dot{L} := D_X L \leq 0$$

d.h. für jede Integralkurve c von X gilt

$$\dot{L} \circ c \leq 0$$

Satz 4

Gibt es zur Gleichgewichtslage x_G eines C^1 -VF X eine Ljapunovfunktion, so ist x_G stabil (gilt

$\dot{L} < 0$ asymptotisch stabil).

Beispiel 5 - konservatives Hamiltonsches System

Ist x_0 ein *isoliertes Minimum* einer Hamiltonfunktion H , so ist x_0 auch eine *stabile Gleichgewichtslage* des Hamiltonschen Systems X_H .

Es gibt nämlich die Funktion

$$V(x) := H(x) - H(x_0)$$

welche eine Ljapunovfunktion ist, denn:

$$\begin{aligned} V(x_0) &= 0 \quad , \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_G\} \\ \dot{V} &= \dot{H} = D_{X_H} \stackrel{\text{Energieerhaltung}}{=} 0 \end{aligned}$$

3 Flussäquivalenz

Wir wollen noch kurz anreißen, unter welchen Umständen es allgemein ausreicht das linearisierte System zu betrachten.

Def. 3

Ein lineares VF $x \mapsto Lx$ ist **hyperbolisch** $:\Leftrightarrow \operatorname{Re} \sigma(L) \neq 0$

Eine Gleichgewichtslage ist **hyperbolisch**, falls $\underbrace{DX(x_0)}_L$ ein hyperbolisches VF ist.

Def. 4

Zwei Flüsse φ_t und Φ_t auf M bzw. N heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow$

\exists Automorphismus $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Homomorphismus $h : M \rightarrow N$, so dass

$$h \circ \varphi_t = \Phi_{\alpha(t)} \circ h$$

mit $h \circ \varphi_t : I \times M \rightarrow N$ und $\Phi_{\alpha(t)} \circ h : M \rightarrow N$ gilt.

Wird die Zeitvariable nicht verändert ($\alpha = id$) spricht man von **isochron äquivalent**.

Satz 5 (Grobmann, Hartmann)

Sei x_0 eine hyperbolische Gleichgewichtslage von X .

Dann ist der Fluss φ_t von X **lokal isochron äquivalent** zum Fluss Φ_t von $DX(x_0)$.

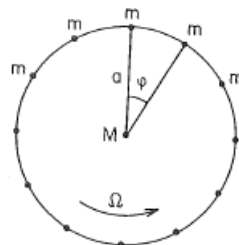
\Rightarrow Das Phasenportrait eines dynamischen Systems um eine hyperbolische Gleichgewichtslage gleicht dem Phasenportrait des an diesem Punkt linearisierten Systems.

Die Sätze aus *Kapitel 1* gelten also uneingeschränkt für hyperbolische Gleichgewichtspunkte, nach *Satz 2* ist deshalb ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt immer instabil.

4 Stabilitätsanalyse der Saturnringe (Maxwell)

J.C. Maxwell befasste sich 1857 mit der mathematischen Theorie für die Stabilität der Saturnringe; diese Arbeit stieß damals auf große Bewunderung. Im Folgenden soll der Aufsatz nur grob abgerissen werden.

Wir betrachten das Problem als Ring von Körpern gleicher Masse m , welche im Gleichgewichtszustand ein reguläres Polygon bilden. Dabei sei M die Masse des Saturns, a der Abstand eines Satelliten sowie Ω die Winkelgeschwindigkeit des gesamten Ringes. Untersucht wird nun, **wann diese Gleichgewichtslage stabil ist**.



Im mitrotierenden System lautet die Lagrange-Funktion (mit $N = \text{Anzahl Körper des Ringes}$):

$$L = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{2} (\dot{r}_k^2 + r_k^2 \dot{\phi}_k^2) + \Omega r_k^2 + \frac{M}{r_k} \right] + \frac{m}{2} \sum_{k \neq l} [r_k^2 + r_l^2 - 2r_k r_l \cos(\phi_k - \phi_l)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch Gleichsetzen der Kraft, welche radial auf einen Satelliten wirkt, mit der Zentrifugalkraft erhält man einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\Omega^2 a^3 = M + mk = \frac{m}{\mu}, \quad k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(k\alpha)}, \quad \mu = \frac{m}{M + km}.$$

An dieser Stelle werden dann kleine Auslenkungen

$$\phi_k = k2\alpha + \psi_k, \quad r_k = a(l + \rho_k)$$

von der Gleichgewichtslage betrachtet. Durch Einsetzen dieser Störungen in die Lagrange-Funktion und geschicktes Umformen lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen des Systems entwickeln. Zu ihrer Lösung wählt man (aus symmetrischen Gründen) den Ansatz

$$\begin{aligned} \rho^{(l)} &= \Re A^{(l)} \exp[i(l2\alpha n - \omega_l \tau)]; & \rho_{n+N}^{(l)} &= \rho_n^{(l)} \\ \psi^{(l)} &= \Re(-i) B^{(l)} \exp[i(l2\alpha n - \omega_l \tau)]; & \psi_{n+N}^{(l)} &= \psi_n^{(l)} \end{aligned}$$

und erhält durch Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen homogene Gleichungen für $A^{(l)}$ und $B^{(l)}$. Hier wird dann gefordert, dass die Frequenzen rein imaginär sind und der Fall größter Störung betrachtet, nämlich dann, wenn benachbarte Teilchen genau entgegengesetzt ausgelenkt werden. Dadurch ist man in der Lage, durch Abschätzung die Stabilitätsbedingung herzuleiten:

$$N^2 < 2.3 \frac{\text{Saturn - Masse}}{\text{Ring - Masse}}$$

Darüber hinaus gelangte Maxwell bei seinen Forschungen zu weiteren Erkenntnissen: Die Ringe müssen aus unabhängigen Teilchen, ob flüssig oder fest, bestehen und bewegen sich jeweils mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten um den Planeten, abhängig vom Abstand zu ihm. Allgemein lässt sich eine langsame Zerstörung des Ringsystems absehen, hervorgerufen durch Störungen wie Zusammenprälle von Körpern verschiedener Ringe usw. Maxwell beruft sich auch viel auf experimentelle Beobachtungen des Saturns, welche seine Thesen bestätigen.

Literatur

- N.Straumann: Klassische Mechanik (Lecture Notes in Physics)
- H.Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen (de Gruyter Verlag 1983) (Hier sind die meisten Beweise zu den genannten Sätzen nachzulesen)