Proseminar Theoretische Physik SS 2013

Störungstheorie II

Henrik Ahmadsad, Niklas Reinhardt

1 Einführung

Wir werden nun im zweiten Teil gestörte Systeme einführen, indem wir die Bewegungsgleichungen um einen Störterm ergänzen. Ein mechanisches System wird durch seine Hamilton-Funktion beschrieben. Im Rahmen der Störungstheorie wird untersucht, wie sich das System verhält, wie sich also die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen verhalten, wenn man ein bisschen an der Hamiltonfunktion „wackelt". Als Beispiel kann man die Hamiltonfunktion eines sehr schnell bewegten Teilchen betrachten. Dabei treten relativistische Effekte auf, weswegen man der Exaktheit wegen einen Korrekturterm in die Hamilton-Funktion einfügen muss. Diese relativistische Korrektur kann dann als Störung interpretiert werden.
Wir beschäftigen uns im folgenden mit fast-integrablen Systemen. Bisher haben wir meist integrable Systeme betrachtet. Zum Beispiel ist das Kepler-Problem, wie wir in der Analytischen Mechanik gesehen haben, ein integrables System. Integrabilität ist aber längst nicht der Regelfall. Die Bewegung von Mond und Erde um die Sonne (3-Körper-Problem) ist z.B. nicht-integrabel. Betrachtet man die Bewegung der Erde isoliert, so erhält man wieder ein integrables 2-Körper-Problem. Der Einfluss des Mondes ist aber relativ gering, und somit ähnelt das System Sonne-Erde-Mond sehr einem 2-Körper-Problem. Man nennt ein solches System fast-integrabel. Der Einfluss des Mondes kann als Störung des integrablen Systems Erde-Sonne betrachtet werden.

2 Mittelungsprinzip

2.1 Störung eines Hamilton-Systems

Seien $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varphi}$ die Winkelwirkungsvariablen eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonian $H_0(\boldsymbol{I})$. Ungestörter Fall:

$$-\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \dot{\boldsymbol{I}} = 0$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{I}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})$$

Einbau einer Störung:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{I}} &= \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}) + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}), \end{aligned} \tag{$\star$}$$

wobei $\varepsilon \ll 1$ und $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ differenzierbare Funktionen sind.

2.2 Mittelung

Die Störung kann im Laufe der Zeit variieren. Wir wollen deswegen einen Mittelwert für die Störung bestimmen. Wir ignorieren dafür für eine Weile, dass das System Hamiltonsch ist und betrachten ein beliebiges System von Differentialgleichungen in Form von ($\star$) auf $G \times T^k$, wobei $T^k = \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \bmod 2\pi\}$ und $G = \{\boldsymbol{I} = (I_1, \dots, I_l)\} \subset \mathbb{R}^l$ Durch Mittelung erhalten wir aus ($\star$) ein neues System ($\star\star$)

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \varepsilon \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}) \tag{$\star\star$}$$

wobei $\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\varphi}) d\varphi_1 \dots d\varphi_k$. Das Mittelungsprinzip besagt, dass das System ($\star\star$) eine gute Näherung für das System ($\star$) ist. Man kann den Übergang vom gestörten zum gemittelt gestörten System auch so auffassen, dass der „periodische Anteil“ der Störfunktion auf dem Torus vernachlässigt wird.

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \underbrace{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) - \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I})}_{:= \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})} + \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I})$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I}) + \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$$

Der Störterm der gemittelten Störung besteht dann nur aus $\bar{\boldsymbol{g}}$.

2.3 Beispiel

Betrachte ein eindimensionales System, d.h. $k = l = 1$.

$$\dot{I} = \varepsilon g(\varphi)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \neq 0$$

wobei g als periodisch vorausgesetzt wird. Für $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ gilt für den Unterschied zwischen gestörten und gemittelt gestörten System

$$|I(t) - J(t)| < \varepsilon \cdot c \qquad c = const.$$

Hierbei ist $J(t) = \varepsilon \bar{g}(J)t + I(0)$.

$$\begin{aligned}
|I(t) - I(0)| &= \int_0^t \varepsilon g(\varphi_0 + \omega t')dt' \\
&= \varepsilon \int_0^t \bar{g}dt' + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{\omega t} \tilde{g}(\varphi)d\varphi \\
&= \varepsilon \bar{g}t + \frac{\varepsilon}{\omega} h(\varphi)
\end{aligned}$$

wobei $h(\varphi) := \int_0^\varphi \tilde{g}(\varphi')d\varphi'$ eine periodische Funktion ist. D.h.

$$I(t) = I(0) + \varepsilon \bar{g}t + \frac{\varepsilon}{\omega} h(\omega t).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |I(t) - J(t)| &= I(0) + \varepsilon \bar{g}t + \frac{\varepsilon}{\omega} h(\omega t) - \varepsilon \bar{g}t - I(0) \\
&= \frac{\varepsilon}{\omega} h(\omega t) < \varepsilon c
\end{aligned}$$

Die Störung lässt sich in diesem Beispiel also in einen linearen und periodische Anteil aufteilen.

3 Bestätigung des Mittelungsprinzip für 1-Frequenz-Systeme

Für Systeme mit *einer* Frequenz rechtfertigt der folgende Satz das Mittelungsprinzip, d.h. die Ersetzung des gestörten Systems durch ein gemitteltes System. Betrachte dazu das System von l+1 Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon f(\mathbf{I}, \varphi) \\
\dot{\mathbf{I}} &= \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{I}, \varphi)
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei $\varphi \bmod 2\pi \in S^1 = T^1$, $I \in G \subset \mathbb{R}^l$ und f und g 2π-periodisch in φ sind, und das hieraus durch Mittelung entstehende System von l Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{J}} = \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) \qquad \text{mit } \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\mathbf{J}, \varphi)d\varphi \tag{2}$$

Bezeichne die Lösung von (1) mit $\mathbf{I}(t)$, $\varphi(t)$ und $\mathbf{J}(t)$ die von (2) mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{I}(0)$, $\varphi(0)$ und $\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}(0)$.

Satz (Verifizierung des Mittelungsprinzips für ein 1-Frequenz-System)
Seien Systeme wie in (1) und (2) gegeben und folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) G ist ein beschränktes Gebiet und ω, f, $\mathbf{g}$ sind dort beschränkt

$$\|\omega\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \quad \|f\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1, \quad \|\mathbf{g}\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1$$

(Wenn im folgenden $\|...\| < ...$ erwähnt wird, sind damit auch immer die ersten beiden Ableitungen gemeint. Die rechte Seite ist dann eine obere Grenze für Funktion und Ableitung.)

(ii) ω geht auf G nicht beliebig nah an 0, sondern wird durch eine Konstante c nach unten beschänkt

$$\omega(\mathbf{I}) > c > 0 \qquad \forall \mathbf{I} \in G$$

(iii) Für jedes t mit $0 \le t \le 1/\varepsilon$ liegt die Umgebung von $\mathbf{J}(t)$ mit dem Radius $d > 0$ in G, d.h.

$$\mathbf{J}(t) \in G - d.$$

Dann gilt:
Für ein genügend kleines ε gilt $\forall t$ mit $0 \le t \le 1/\varepsilon$, dass

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Bemerkung: $G - d$ ist die Menge aller Punkte in G, deren Umgebungen mit dem Radius d in G liegen.

Beweis: Wir drücken $\mathbf{I}$ durch neue Variablen $\mathbf{P}$ aus. Dadurch können wir eine neue Differentialgleichung ableiten, die in dem Sinne einfacher ist, dass wir sie besser mit $\mathbf{J}$ vergleichen können. Aus $|\mathbf{P} - \mathbf{J}|$ und dem einfach zu berechnenden $|\mathbf{I} - \mathbf{P}|$ finden wir dann eine Abschätzung für $|\mathbf{I} - \mathbf{J}|$. $\mathbf{P}$ ist wie folgt festgelegt

$$G \to G, \quad \mathbf{I} \mapsto \mathbf{P} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{k}(\mathbf{I}, \varphi), \tag{3}$$

wobei $\mathbf{k} : G \times S^1 \to G$ 2π-periodisch in φ ist. Die genaue Wahl von $\mathbf{k}$ werden wir später vornehmen. Aus (3) folgt

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial I} \dot{\mathbf{I}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\mathbf{P}} \overset{(1)}{=} \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{I}, \varphi) + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbf{I}) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{g} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} f \tag{4}$$

Wie wir noch sehen werden, gibt es, wenn (3) invertierbar ist, eine Rücktransformation von der Form

$$G \to G, \quad \mathbf{P} \mapsto \mathbf{I} = \mathbf{P} + \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{P}, \varphi)$$

mit einer Funktion $\mathbf{h} : G \times S^1 \to G$. Drücken wir (4) in der Variable $\mathbf{P}$ aus, erhalten wir l neue Differentialgleichungen in $\mathbf{P}$

$$\dot{\mathbf{P}} = \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{P}, \varphi) + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \omega(\mathbf{P}) \right] + \mathbf{R} \tag{5}$$

wobei $\mathbf{R}$ sich aus den ε^2-Termen in (4) ergibt und von ω, f, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{k}$ und/oder deren Ableitungen besteht. Wir wollen $\mathbf{k}$ nun so festlegen, dass sich (5) etwas vereinfacht. Der erste Gedanke wäre $\mathbf{k}$ so zu wählen, dass

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \omega = 0$$

$$\overset{(\omega \neq 0)}{\Leftrightarrow} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\omega} \mathbf{g}$$

Diese Gleichung ist i.A. nicht lösbar, weil $\mathbf{k}$ periodisch ist. Sie impliziert, dass auch die Mittelung beider Seiten gleich sind. Aber die Mittelung von $\partial \mathbf{k}/\partial \varphi$ ist 0, wobei die von $\mathbf{g}$ nicht notwendigerweise 0 ist (die von $\partial \mathbf{g}/\partial \varphi$ wäre es wohl). Stattdessen wählen wir $\mathbf{k}$ so, dass es den periodischen Teil abzüglich von Konstante von $\mathbf{g}$ eliminiert, d.h.

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\omega} \tilde{\mathbf{g}} \text{ mit } \quad \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - \bar{\mathbf{g}}.$$

Wir setzen also

$$\mathbf{k}(\mathbf{P}, \varphi) = -\int_0^{\varphi} \frac{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{P}, \varphi')}{\omega(\mathbf{P})} d\varphi'$$

Aus (5) wird dann:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{P}, \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\int_0^{\varphi} \frac{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{P}, \varphi')}{\omega(\mathbf{P})} d\varphi' \right) \omega(\mathbf{P}) \right] + \mathbf{R} \\ &= \varepsilon \left[\mathbf{g}(\mathbf{P}, \varphi) - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{P}, \varphi) \right] + \mathbf{R} \\ &= \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{P}) + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun $\dot{\mathbf{P}}$ abschätzen, um es mit $\dot{\mathbf{J}}$ vergleichen zu können. $\varepsilon \bar{\mathbf{g}}$ ist beschränkt, weil $\mathbf{g}$ beschränkt ist, also $\mathcal{O}(\varepsilon)$. $\mathbf{R}$ ist dann beschränkt, wenn

$$\|\omega\| < c_1, \quad \|f\| < c_1, \quad \|\mathbf{g}\| < c_1, \quad \|\mathbf{k}\| < c_3, \quad \|\mathbf{h}\| < c_4.$$

Hierbei sind wieder die Ableitungen mit eingeschlossen. ω, f, $\mathbf{g}$ sind nach Voraussetzung beschränkt. $\mathbf{k}$ ist beschränkt, weil es eine periodische Funktion ist (die Stammfunktion einer periodischen Funktion mit Mittelwert 0). $\mathbf{h}$ ist nach folgendem Lemma beschränkt.

Lemma: Sei α fest. Es existiert ein ε_0, sodass die Einschränkung der Abbildung $\mathbf{I} \to \mathbf{P} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{k}$ (wobei $\|\mathbf{k}\|_{C^2} < c_3$), auf $G - \alpha$ für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ein Diffeomorphismus ist. Für die

Umkehrabbildung $\mathbf{P} \to \mathbf{I} = \mathbf{P} + \varepsilon \mathbf{h}$ gilt auf $G - 2\alpha$, dass $\|\mathbf{h}\|_{C^2} < c_4$ mit $c_4(\alpha, c_3) > 0$.

Für $\alpha = d/2$ und $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ist (3) invertierbar, was für oben schon verwendet haben, und $\mathbf{h}$ beschränkt.

$$\Rightarrow \|\mathbf{R}\| < \varepsilon^2 c_2, \text{ wobei } \quad c_2(c_1, c_3, c_4) > 0.$$

Vergleiche nun das gemittelte System mit dem ungemittelten in $\mathbf{P}$ ausgedrückt.

$$\text{gemittelt:} \qquad \dot{\mathbf{J}} = \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J})$$

$$\text{ungemittelt:} \qquad \dot{\mathbf{P}} = \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{P}) + \mathbf{R}$$

$$\overset{t \leq 1/\varepsilon}{\Rightarrow} |\mathbf{P} - \mathbf{J}| < \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Es gilt aber auch $|\mathbf{I} - \mathbf{P}| = |\mathbf{I} - \mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{k}| = \varepsilon |\mathbf{k}| \leq \varepsilon \|\mathbf{k}\|_{C^2}$

$$\Rightarrow |\mathbf{I} - \mathbf{J}| = |\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{P} - \mathbf{J}| \leq |\mathbf{I} - \mathbf{P}| + |\mathbf{P} - \mathbf{J}| < \mathcal{O}(\varepsilon).$$

□

4 Adiabatische Invarianten

Wir betrachten ein System mit einem Freiheitsgrad und einem Hamiltonian $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; \lambda)$, der von einem beliebigen Parameter λ abhängt. Beispielsweise das Pendel:

$$H = \frac{p^2}{2l^2} + lg\frac{q^2}{2}$$

l: Pendellänge
g: Erdschwerebeschleunigung
q: Generalisierte Koordinate → Winkel

Als Parameter können wir l und g wählen. Aus Gründen der Umsetzbarkeit wählen wir $\lambda = l$. Wir variieren nun die Pendellänge. Die zeitliche Dauer der Änderung muss dabei sehr viel größer sein als die Periodendauer des Pendels, ansonsten könnte das System durch die Längenänderung in Resonanz versetzt werden. Energie, Amplitude und Frequenz werden nun Funktionen der Pendellänge. Man beobachtet: Obwohl sich Frequnz und Energie jeweils stark ändern können, ändert sich das Verhältnis von Energie und Frequenz E/ω nur gering. Solche Größen, die sich bei kleinen Änderungen eines Parameters nur geringfügig ändern, heißen adiabatische Invarianten des Systems.

Um adiabatische Invarianten zu definieren sei der Hamiltonian $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; \lambda)$ des Systems zweimal stetig differenzierbar nach λ. Sei weiterhin $\lambda = \varepsilon t$ (im Beispiele des Pendels könnte man die Längenänderung wie folgt formulieren: $l = l_0(1 + \varepsilon t)$).

Definition (Adiabatische Invarianten):
Eine Größe $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \lambda)$ ist eine adiabatische Invariante, wenn gilt: Für alle $\kappa > 0$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ sodass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und alle t mit $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ gilt

$$|\boldsymbol{I}(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t), \varepsilon t) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0), 0| < \kappa$$

Wie man sieht ist insbesondere jede Erhaltungsgröße eine adiabatische Invariante. Ohne Beweis: In einem 1-dimensionalen System ist die Wirkungsvariable eine adiabatische Invariante. (Der Beweis verwendet u.a. das Mittelungsprinzip.) Beispielsweise ist beim harmonischen Oszillator $I = E/\omega$, d.h. das Verhältnis von Energie zu Frequenz ist hierbei eine adiabatische Invariante.