4. Vortrag im Proseminar Theoretisch Physik: Winkel-Wirkungsvariablen

Vortragende: Alexander Herbst & Matthias Borchert

1. Grundlagen

Im Folgenden wird der Phasenraum betrachtet ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const = E$)

Ein mechanisches System heißt integrabel:
$\Leftrightarrow$ *Es existieren n Funktionen* F_i $i = 1, \dots n$ *die:*

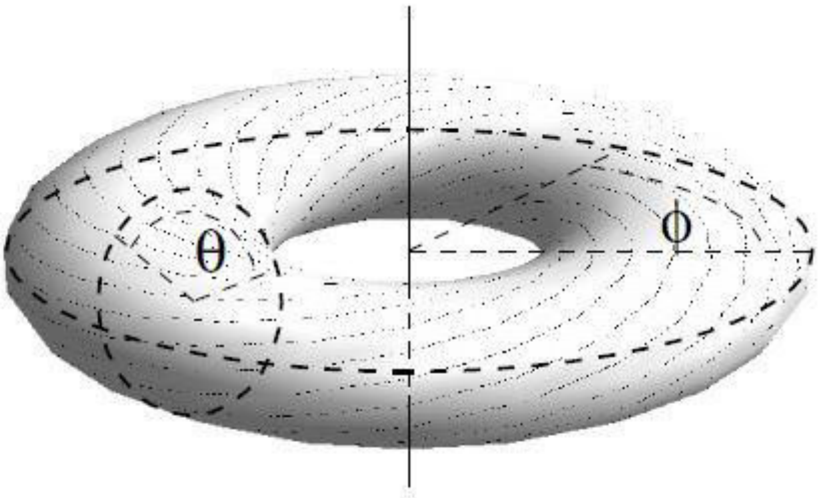
- *Erhaltungsgrößen der Bewegung sind:* $\frac{d}{dt} F_i(p, q) = 0$
- *in Involution zueinander stehen:* $\{F_i, F_j\} = 0 \; \forall i, j = 1, \dots n$

$\Rightarrow$ Die Bewegung des Systems findet nur in dem Bereich des Phasenraums statt, in dem die Erhaltungsgrößen tatsächlich erhalten sind. Dies definiert eine Bewegungsmannigfaltigkeit, den sogenannten level set:

$$M_f \coloneqq \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, \dots n\}$$

M_f ist diffeomorph zu einem n-dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n-mal)
$\Rightarrow$ Es existiert ein Variablensatz, für den die Bewegung die Form der Bewegung auf einem Torus hat

2. Definition der Variablen



Ein zweidimensionaler Torus T^2 *im* $\mathbb{R}^3$

Quelle: Theoretische Mechanik – Alexander Altland Seite 188

Bereits an diesem einfachen Beispiel wird klar: n winkelartige Variablen ϕ_i parametrisieren einen n-dimensionalen Torus vollständig:

$$T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \; mod \; 2\pi\}$$

⇒ Verwende eine geeignete kanonische Transformation, die die Winkel als neue Orte festlegt. Bei den neuen Impulsen handelt es sich dann aus Dimensionsgründen um eine Wirkung:

$$\phi \; ist \; dimensionslos \;\Longrightarrow [\dot{\phi}] = \frac{1}{T} = \left[\frac{\partial}{\partial I}\widetilde{H}\right] = \left[\frac{1}{I}\right] * E \Rightarrow [I] = E * T$$

Wobei $\widetilde{H}$ die neue Hamiltonfunktion ist.

Ein System von Winkel-Wirkungsvariablen wird also über folgende Forderungen definiert:

- $\widetilde{\mathrm{H}}$ ist unabhängig von ϕ, da H auf dem Torus erhalten und somit winkelunabhängig ist
- ϕ und I sind kanonisch konjugiert: $\{\phi_l, I_k\} = \delta_{lk}$
- ϕ_i ändert sich um 2π, wenn sich die Phasenraumtrajektorie einmal um die i-te Einheitskomponente des Torus herum windet

Konstruktion der neuen Hamiltonfunktion:
Man nutze eine Erzeugende vom Typ 2, die Aufgrund der Ähnlichkeit zur Hamilton-Jacobi-Theorie S genannt wird:

$$\widetilde{H}(\phi, I) = H\big(q(\phi, I), p(\phi, I)\big) + \frac{\partial S}{\partial t}(q(\phi, I), I)$$

Zu lösende Gleichungen:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, I)\right) = \widetilde{H}(I)$$

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \phi_i} = 0 \;\Rightarrow I_i = const$$

$$\dot{\phi_i} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial I_i} = \omega_i(I) \Longrightarrow \phi_i(t) = \omega_i(I) * t + \phi_i(0)$$

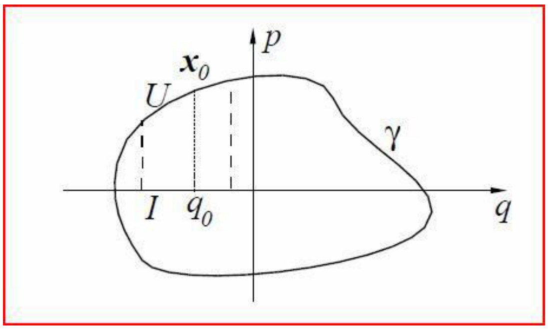
Da ω_i nur von I abhängt, handelt es sich um eine Konstante, und zwar um die Winkelgeschwindigkeit von ϕ_i. Hier zeigt sich der große Vorteil von Winkel-Wirkungsvariablen: Für periodische Systeme ist es möglich die einzelnen Kreisfrequenzen zu bestimmen, ohne das ganze Problem lösen zu müssen.

3. Variablen für Systeme mit einem Freiheitsgrad

Die Systeme sind grundsätzlich integrabel, da $F_1 = H$
⇒Die Phasenraumtrajektorie ist eine geschlossene Kurve γ und diffeomorph zum Kreis

Zu ermitteln ist die Zeitabhängigkeit des Kurvendurchlaufs:
Differential von S: $dS = \frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial I} dI$

Die Kurve γ ist lokal eindeutig durch die Variable q darstellbar:



Quelle: Theoretische Mechanik - Alexander Altland Seite 192

$\forall x_0 = (q_0, p_0) \in \gamma \; \exists \; U \subset \gamma \; offen \; und \; I \subset \mathbb{R}$:

$$U = \{(q, p(q, E) \colon q \epsilon I\}$$

Diese Form der lokalen Darstellung macht es möglich entlang der Kurve bezüglich dS zu integrieren:

$$S(q,E) = \int_{q_0}^{q} (\frac{\partial S}{\partial q'} dq' + \frac{\partial S}{\partial I} dI) = \int_{q_0}^{q} \frac{\partial S}{\partial q'} dq' = \int_{q_0}^{q} p(q', E)\, dq'$$

Im zweiten Schritt wurde verwendet, dass I eine Konstante, also dI=0 ist und im dritten Schritt die bekannte Abhängigkeit der alten Impulse von der Erzeugenden.

Verwendet man nun: $\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I}$ sowie die dritte Bedingung, die an das System gestellt wurde, so folgt:

$$2\pi = \int_{\gamma} d\phi = \int_{\gamma} (\frac{\partial \phi}{\partial q} dq + \frac{\partial \phi}{\partial I} dI) = \int_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial q} dq = \int_{\gamma} \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial q} dq$$

Es folgt die Definition der Wirkungsvariablen, für 1-dim. Systeme:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial q} dq$$

I ist in dieser Form nur noch eine Funktion der erhaltenen Hamiltonfunktion: $I = F(E)$
Durch Inversion erhält man die Darstellung $E = F^{-1}\,(I)$

$$\Rightarrow I = const, \qquad \phi(t) = \omega(I) * t + \phi(0) = \frac{\partial}{\partial I} F^{-1}\,(I) * t + \phi(0)$$

$$\phi(t) = \frac{\partial S}{\partial I} \left(q, F^{-1}(I)\right) \Rightarrow q(\phi(t), I)$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} (q, I) \Rightarrow p(\phi(t), I)$$

Man erhält mit diesem Verfahren eine Lösung in den alten Koordinaten, ohne eine einzige Differentialgleichung lösen zu müssen. Dies macht das Verfahren grade für höhere Dimensionen interessant.

Harmonischer Oszillator in WWV

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \Rightarrow p = \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2} q^2\right)}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$S(q, E) = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2}{2} q'^2\right)}$$

$$q_0 = q(0)$$

Zunächst betrachten wir die Beziehung zwischen E und I.

Die von der ellipsenförmigen Bewegung eingeschlossene Fläche $A = \pi q_{max} p_{max}$
$= 2\pi E/\omega$

$\Rightarrow \quad I = E/\omega \qquad \varphi(t) = \omega t + \varphi(0) \qquad S(q, I) = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m\left(I\omega - \frac{m\omega^2}{2} q'^2\right)}$

$$\varphi = \partial_I S(q, I) = \omega \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{\frac{m}{2\left(I\omega - \frac{m\omega^2}{2} q'^2\right)}} = \arcsin\left(q \sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\right) + c(q_0, I)$$

$c(q_0, I) = -\arcsin\left(q_0 (m\omega/2I)^{1/2}\right)$ ist eine von der Untergrenze der Integration herrührende Konstante.

$\Rightarrow \quad q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin(\omega t + \delta)$, $\quad \delta = \varphi(0) - c(q_0, I)$ ist die Phase und durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

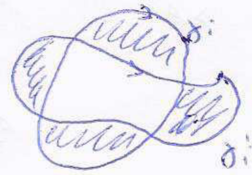
WWV im $\mathbb{R}^{2n}$

Ziel: Konstruktion eines Lösungsschemas, das ohne DGL auskommt.

Gegeben: System mit n Freiheitsgraden im $\mathbb{R}^{2n} = \{(\vec{p}, \vec{q})\}$ gegeben durch $H(\vec{p}, \vec{q})$.
n Integrale der Bewegung (= Erhaltungsgrößen) in Involution (d.h. $\{F_i, F_j\} = 0$ $\forall i, j$.
~~gegeben durch~~ $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$.

Sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ eine Basis für ~~für von~~ eindimensionale Kreise auf dem Torus M_f.
(Der Zuwachs der Koordinaten φ_i auf dem Kreis γ_j ist gleich 2π für $i=j$ und gleich 0 für $i \neq j$.)

Wir def.:
$$I_i(\vec{f}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \vec{p}\, d\vec{q} \qquad (*)$$



γ_i lassen sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen und sind nicht stetig ineinander überführbar.

Z: I_i hängt nicht von der Wahl der Kurve γ_i ab $\Leftrightarrow \oint_{\gamma_i} - \oint_{\gamma_i'} \vec{p}\, d\vec{q} = 0$

Als bekannt vorausgesetzt: Die 2-form $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ ist auf M_f gleich 0.

$$\oint_{\gamma_i} - \oint_{\gamma_i'} \vec{p}\, d\vec{q} = \oint_{\gamma_i - \gamma_i'} \vec{p}\, d\vec{q} = \oint_{\partial\sigma} \vec{p}\, d\vec{q} = \int_\sigma d(\vec{p}\, d\vec{q}) = \int dp_i \wedge dq_i = 0$$

$\partial\sigma = \gamma_i - \gamma_i'$ Stokes $\int_V d\omega = \oint_{\partial V} \omega$ (vgl. Abschnitt 44 im Arnold).

Def.: Die n Var. ~~der~~ $I_i(\vec{f})$ gegeben durch $(*)$ nennen wir Wirkungsvariablen.

Wir nehmen nun an, dass für gegebene Werte f_i der Integrale F_i die n Variablen I_i unabhängig sind: $\det\left(\frac{\partial \vec{I}}{\partial \vec{f}}\right)\Big|_{\vec{f}} \neq 0$.

Dann können wir in einer Umgebung des Torusses M_f die Variablen $\vec{I}, \vec{\varphi}$ als Koordinaten wählen.

Satz: Die Transformation $\vec{p},\vec{q} \to \vec{I},\vec{\varphi}$ ist kanonisch, d.h. $\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dI_i \wedge d\varphi_i$

Wir betrachten die differenzierbare 1-Form ~~ω^2~~ $\vec{p}\,d\vec{q}$ auf TM_f.

M_f ist null (d.h. $\omega^2 = 0$ auf $TM_f|_x \ \forall x \in M_f$.)

$\Rightarrow$ ~~Satz~~ Die äußere Ableitung von $\vec{p}\,d\vec{q}$, ω^2 ist gleich 0 auf M_f. $\vec{p}\,d\vec{q}$ ist auf M_f geschlossen.

Betrachte $S(x) = \int_{x_0}^{x} \vec{p}\,d\vec{q}|_{M_f}$. Z: $S(x)$ hängt nicht vom Integrationsweg ab.

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \vec{p}\,d\vec{q} - \int_{\gamma_2} \vec{p}\,d\vec{q} = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{p}\,d\vec{p} - \int_{\gamma_2} \vec{p}\,d\vec{q} = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} \vec{p}\,d\vec{q} = \oint_{\partial A} \vec{p}\,d\vec{q} = \int_A d(\vec{p}\,d\vec{q}) = \underbrace{\int_A dp_i \wedge dq_i}_{=0}$$

q.e.d.

Somit ist $S(x)$ wohldefiniert.

Noch bildet $S(x)$ auf verschiedene Werte ab, mit der Periode $\Delta_i S = \int_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i$

Sei x_0 ein Punkt auf M_f, in dessen Umgebung die n Variablen $\vec{q}$ Koordinaten auf M_f sind, sodass die Untermannigfaltigkeit $M_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ gegeben ist durch n Gleichungen der Form $\vec{p} = \vec{p}(\vec{I},\vec{q})$, $\vec{q}(x_0) = \vec{q}_0$.

In einer einfach zusammenhängenden Umgebung des Punktes q_0 ist $S(\vec{I},\vec{q}) := \int_{q_0}^{q} \vec{p}(\vec{I},\vec{q})\,d\vec{q}$. Sie kann als erzeugende Funktion der kanonischen Trafo $\vec{p},\vec{q} \to \vec{I},\vec{\varphi}$ verwendet werden: $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}$ $\varphi = \frac{\partial S}{\partial \vec{I}}$. Dies können wir auf ganz M_f ausdehnen, indem wir uns jeweils passende ~~Kontinuitäts~~ Punkte und Umgebungen wählen.

$\vec{\varphi}$ sind periodische Koordinaten: $\Delta_i \varphi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j} \Delta_i S = \frac{\partial}{\partial I_j} 2\pi I_i = 2\pi \delta_{ij}$. □

$\Rightarrow$ Lediglich algebraische Operationen und Quadraturen nötig (vgl. Liouville).