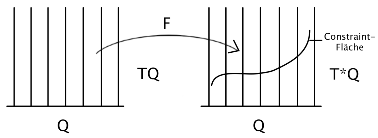
Hamilton-Formalismus

$$n \text{ ODE 2. Ordnung } \Rightarrow \ 2n \text{ ODE 1. Ordnung}$$

Mit $F(q,v) = (q, \frac{\partial L}{\partial v})$ und $\text{Rang}\{H_{ab}(q,v)\} = r < n$ folgt: $\text{Rang}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\right\} = n+r = 2n-s$. Die Invertierbarkeit von $F(q,v)$ ist also nicht mehr gegeben.



$$\mathcal{C} = \text{Bild}(F) \subset T^*Q \qquad \mathcal{C} = \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \middle| \phi_1(q,p) = \cdots = \phi_s(q,p) = 0\right\}$$

Entscheidend ist hierbei, dass die Funktionen ϕ_i linear unabhängig sind $\forall\, i = 1,\ldots,s$ und ihre Differentiale auf $\mathcal{C}$ nicht verschwinden: $\mathrm{d}\phi_i\big|_{\mathcal{C}} \neq 0 \ \ \forall i = 1,\ldots,s$. Bilde nun die Energiefunktion E auf TQ:

$$E(q,v) := \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a}\, v^a - L(q,v) = p_a(q,p)\, v^a - L(q,v)$$

Betrachtung des Differentials von E zeigt, dass eine Abhängigkeit von v nur durch die p gegeben ist. Daher lässt sich E schreiben als:

$$E = H_0 \circ F \qquad E(q,v) = H_0(q, F(q,p)) \qquad \text{mit } H_0 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Hamiltonfunktion H_0 nur auf $\mathcal{C} \subset T^*Q$ festgelegt, auf dem Rest von T^*Q nicht eindeutig festgelegt. Dann kann $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ geschrieben werden als $H = H_0 + \lambda^m\, \phi_m$ mit $\phi_m\big|_{\mathcal{C}} = 0$ und $\mathrm{d}\phi^m\big|_{\mathcal{C}} \neq 0$. Damit folgt:

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} = \{\phi_m, H_0\} + \{\phi_m, \phi_n\}\lambda^n$$

Hat nun $\{\phi_m, \phi_n\}\big|_{\mathcal{C}}$ nicht vollen Rang r, so lassen sich r der λ^n eindeutig bestimmen. Gilt hingegen $\{\phi_m, \phi_n\}\big|_{\mathcal{C}} = 0$, so lässt sich dies wie oben schreiben als $\{\phi_m, \phi_n\}\big|_{\mathcal{C}} = C^l_{\mathrm{m,n}} \cdot \phi_l$ mit $l = 1,...,k$. Diese $\phi_1,...,\phi_k$ heißen „first class Constraints“. Diese erzeugen Eichtransformationen, da eine Bewegung in diese Richtungen zu keiner Änderung der Wirkung führt.

Geometrische Deutung

$(P,w) = (T^*Q, -\mathrm{d}\theta)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit, wobei das Kovektorfeld $\theta \in ST^0_1(P)$ auf natürliche Weise gegeben ist (Beweis siehe Stud.IP).

Definiert man $T^\perp_\lambda(P) = \left\{x \in T_\lambda P \middle| \omega(x,y) = 0 \ \ \forall\, y \in T_\lambda(\mathcal{C})\right\}$ mit $\lambda \in \mathcal{C}$, so ergibt sich:

$$\text{isotrop} \ \Leftrightarrow \ T^\perp_\lambda(P) \supset T_\lambda(\mathcal{C}) \quad \forall\, \lambda \in \mathcal{C}$$
$$\text{ko-isotrop} \ \Leftrightarrow \ T^\perp_\lambda(P) \subset T_\lambda(\mathcal{C}) \quad \forall\, \lambda \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ ist ko-isotrop, denn da ω nicht entartet, $\exists!\, X_f \in ST^1_0(P)$ (Hamilton'sches Vektorfeld), für die Lie-Ableitung gilt:

$$L_{X_f}\, \omega = (i_{X_f} \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_{X_f})\, \omega = \mathrm{d}\, i_{X_f}\, \omega = \mathrm{d}\, \mathrm{d}f = 0$$

Außerdem gilt für $f \in C^\infty(P)$:

$$\{f,g\} = X_g(f) = -X_f(g) = (f_{,q^a}\, g_{,p_a} - f_{,p_a}\, g_{,q^a})$$

Bildet man nun $i_{x_{\{f,g\}}}\omega = \mathrm{d}\{f,g\}$, so folgt durch Ausrechnen: $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$. Da $\{\phi_m, \phi_n\}\big|_{\mathcal{C}} = -X_{\ \phi_m}(\phi_n)$ folgt aus $\{\phi_m, \phi_n\}\big|_{\mathcal{C}} = 0$

$$X_{\phi_m}\big|_{\mathcal{C}} \qquad \text{tangential an } \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \ T^\perp_\lambda(P) = \text{Span}\{X_{\phi_1}, \ldots, X_{\phi_k}\}\big|_\lambda \subset T_\lambda(\mathcal{C}) \quad (\text{da } \phi_i \text{ lin. unabh. wie oben})$$
$$\Rightarrow \ \mathcal{C} \text{ ist koisotrop}$$

Mit der Ko-Isotropie von $\mathcal{C}$ zeigt man, dass das Unterbündel $\lambda \mapsto T^\perp_\lambda(\mathcal{C}) \subset T_\lambda(\mathcal{C})$ integrabel ist. Stark vereinfacht zeigt man dies wie folgt, wobei $\hat{\omega} = \omega\big|_{\mathcal{C}}$: ($\to$ Satz von Frobenius)

$$i_{[X,Y]}\, \hat{\omega} = L_X(i_Y\, \hat{\omega}) - i_Y\, L_X\, \omega = -i_Y(i_X \circ \mathrm{d}\hat{\omega} + \mathrm{d}\, i_X\hat{\omega}) = 0$$

Da $[X,Y] \in ST^\perp(\mathcal{C})$, können wir eine Äquivalenzrelation angeben, die die Dimension des Phasenraums um weitere s reduziert. Wir gelangen so zum $2(n-s)$-dim. reduzierten Phasenraum, auf dem Integrabilität nach Frobenius gilt.