Nachtrag zum Vortrag

Behauptung

Durch: $(P, \omega) = (T^*Q, -\mathrm{d}\theta)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit mit natürlichem Kovektorfeld $\theta \in ST_1^0(P)$ gegeben.

Beweis

Zur Erklärung von w Folgendes: Auf $P = T^*Q$ ist ein Kovektorfeld $\theta \in ST_1^0(P)$ natürlich definiert durch

$$\theta_\lambda(X_\lambda) := \lambda(\pi_{*\,\lambda} X_\lambda)$$

$$\begin{aligned} \text{Beachte:} \quad & P \ni \lambda \in T^*_{\pi(\lambda)}Q \\ & \pi_{*\,\lambda}(X_\lambda) \in T_{\pi(\lambda)}Q \end{aligned}$$

also ist es sinnvoll, λ auf $\pi_{*\,\lambda}(X_\lambda)$ anzuwenden.

Sei $\{\mathcal{U}, \phi\},\ \phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, Karte auf Q mit Kartengebiet $\mathcal{U} \subset Q$ und Komponentenfunktionen $X^a : \mathcal{U} \to \mathbb{R},\ a = 1, \ldots, n$. Diese induziert Karte $\{V, \psi\}$ auf $P = T^*Q$ mit Kartenbegiet $V := \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset T^*Q$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^{2n}$. Die Komponentenfunktionen sind $(a = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} \psi^a &:= X^a \circ \pi = q^a \\ \psi^{n+a} &:= p_a \end{aligned}$$

wobei $p_a(\lambda) = p_a(\lambda_b\, \mathrm{d}X^b) := \lambda_a$.

$$\begin{aligned} \text{Ist nun} \quad & X_\lambda = X_{q^a}(\lambda) \frac{\partial}{\partial q^a}\bigg|_\lambda + X_{p^a}(\lambda) \frac{\partial}{\partial p^a}\bigg|_\lambda \ \in\ T_\lambda(p) \\ \text{dann} \quad & T_{*\,\lambda}(X_\lambda) = X_{q^a}(\lambda) \frac{\partial}{\partial X^a}\bigg|_\pi (\lambda) \\ \text{da} \quad & T_{*\,\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial q^a}\bigg|_\lambda \right) = \frac{\partial}{\partial X^a}\bigg|_\pi (\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad & \lambda(\pi_{*\,\lambda}(X_\lambda)) \\ & = \lambda_b\, \mathrm{d}X^a \bigg|_{\pi(\lambda)} \qquad \left(X_{q^a}(\lambda) \frac{\partial}{\partial X^a}\bigg|_\pi (\lambda) \right) \\ & = \lambda_a\, X_{q^a}(\lambda) \\ & \overset{!}{=} \theta_\lambda(X_\lambda) \end{aligned}$$

Mit $\theta_\lambda = A_a(\lambda)\mathrm{d}q^a + B^b(\lambda)\mathrm{d}p_b$ hat man

$$\begin{aligned} \theta_\lambda(X_\lambda) &= A_a(\lambda) X_{q^a}(\lambda) + B^b(\lambda) X_{p_b}(\lambda) \\ &\overset{!}{=} \lambda_a\, X_{q^a}(\lambda) \qquad\qquad \forall X_\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ B^b = 0\,, \quad A_a(\lambda) = \lambda_a = p_a(\lambda) \\ &\Leftrightarrow\ \theta = p_a\, \mathrm{d}q^a \end{aligned}$$

Durch die Orte q^a und Impulse p_a ist also eine eindeutige Symplektik gegeben.

□

Quelle: Vortragsmaterial Prof. Dr. Giulini