Vortrag: Symplektische Mannigfaltigkeiten

Inhaltsverzeichnis

1 Symplektische Strukturen **1**
1.1 Def.: Symplektischer Raum 1
1.2 Def.: Symplektische Mannigfaltigkeit 1
1.3 Bsp.: $(\mathbb{R}^{2n},\omega^2)$ 1
1.3.1 Bem.: 2

2 Symplektische Struktur des Kotangentialbündels **2**
2.1 Wdh.: Kotangentialbündel 2
2.1.1 Bem.: 2
2.2 Satz: Natürliche Symplektische Struktur des Kotangentialbündels 2
2.2.1 Bem.: Die obige Konstruktion ist unabhängig von der verwendeten Karte 3
2.2.2 Bem.: Der Phasenraum ist ein Kotangentialbündel 3

3 Hamiltonsche Vektorfelder **4**
3.1 Def.: Inneres Produkt für p-Formen 4
3.2 Def.: Hamiltonsches Vektorfeld 4
3.2.1 Bem.: X_f in lokalen Koordinaten 4
3.3 Satz: Cartan-Formel 4
3.4 Lemma: 4

4 Die Poisson-Klammer **5**
4.1 Def.: Poisson-Klammer 5
4.2 Eigenschaften der Poisson-Klammer 5

1 Symplektische Strukturen

1.1 Def.: Symplektischer Raum

Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Ein Tupel (V,ω) heißt symplektischer Raum, wenn ω eine Bilinearform auf V mit folgenden Eigenschaften ist:

(i) ω ist antisymmetrisch, d.h. $\omega(v,w) = -\omega(w,v) \quad \forall v,w \in V$

(ii) ω ist nicht ausgeartet, d.h. $\forall v \neq 0\ \exists w : \omega(v,w) \neq 0,\ v,w \in V$

1.2 Def.: Symplektische Mannigfaltigkeit

Sei M^{2n} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein Tupel (M^{2n},ω^2) heißt symplektische Mannigfaltigkeit, wenn $\omega^2 \in \Omega^2(M^{2n})$ eine Differentialform auf M^{2n} mit folgenden Eigenschaften ist:

(i) ω^2 ist geschlossen, d.h. $d\omega^2 = 0$

(ii) ω^2 ist nicht ausgeartet, d.h. $\forall v \neq 0\ \exists w : \omega^2(v,w) \neq 0,\ v,w \in T_pM^{2n}$

1.3 Bsp.: $(\mathbb{R}^{2n},\omega^2)$

Betrachte den $\mathbb{R}^{2n}$ mit kartestischen Koordinaten $x^\alpha,\ \alpha = 1,\ldots,2n$, wobei $q^i := x^i,\ p^i := x^{n+i},\ i = 1,\ldots,n$. Wir werden auch im Folgenden für griechische Indizes stets den doppelten Laufbereich annehmen wie für lateinische Indizes. Für ω^2 gelte $\omega^2 = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i$. $(\mathbb{R}^{2n},\omega^2)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Beweis:

(i) Es gilt einfach:

$$\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}(\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i) = \mathrm{d}^2 q^i \wedge \mathrm{d}p^i + (-1)^1 \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}^2 p^i = 0$$

(ii) Seien nun $V, W \in T_a\mathbb{R}^{2n}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^{2n}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\omega^2_{|a}(V,W) &= (\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i)(V,W) = (\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{n+i})(V,W) \\
&= (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^{n+i} - \mathrm{d}x^{n+i} \otimes \mathrm{d}x^i)\left(V^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, W^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \\
&= V^\alpha \delta^i_\alpha W^\beta \delta^{n+i}_\beta - V^\alpha \delta^{n+i}_\alpha W^\beta \delta^i_\beta \\
&= V^i W^{n+i} - V^{n+i} W^i
\end{aligned}$$

Für $V \neq 0$ ist $V^k \neq 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$. Wähle $W \in T_a\mathbb{R}^{2n}$ genau so, dass $W^{n+k} \neq 0$ und $W^j = 0\ \forall j \neq n+k$. Dann gilt (hier ohne Summenkonvention) $\omega^2_{|a}(V,W) = V^k W^{n+k} \neq 0$.

1.3.1 Bem.:

Im $\mathbb{R}^{2n}$ lassen sich die Tangentialräume mit $\mathbb{R}^{2n}$ selbst identifizieren. Mit $\omega^2 = \omega^2_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta$ gilt also $V^\mu \omega^2_{\mu\nu} W^\nu = V^i W^{n+i} - V^{n+i} W^i$; $\mu, \nu = 1, \dots, 2n$; $i = 1, \dots, n$. Fasst man ω^2 in diesem Kontext als Matrix auf, so gilt

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

2 Symplektische Struktur des Kotangentialbündels

2.1 Wdh.: Kotangentialbündel

Sei M^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Kotangentialbündel T^*M ist der Dualraum des Tangentialbündels TM. (T^*M, π, M) ist ein Vektorraumbündel vom Rang m über M mit Fasern T^*_pM. π ist die kanonische Projektion des Bündels: $\pi : T^*M \to M, \quad \pi^{-1}(p) = T^*_pM \quad \forall p \in M$

2.1.1 Bem.:

Das Kontangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension m hat die Dimension $2m$ und ist insbesondere selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit: Ein Punkt aus T^*M ist eine 1-Form auf dem Tangentialraum von M in einem bestimmten Punkt aus M. Bezeichnen wir die m Koordinaten von M mit q und die m Koordinaten des zugehörigen Kotangentialbündels mit p, so erhalten wir duch die $2n$ Koordinaten $(q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m)$ lokale Koordinaten des Kotangentialbündels.

2.2 Satz: Natürliche Symplektische Struktur des Kotangentialbündels

Sei M^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann hat das Kotangentialbündel T^*M eine natürliche symplektische Struktur. Verwendet man (zu den Koordinaten aus Bemerkung 2.1.1 analoge) Koordinaten p und q, dann ist diese 2-Form wie folgt gegeben:

$$\omega^2 = dq^i \wedge dp_i \tag{2.1}$$

Beweis:

Nach Bemerkung 2.1.1 beschreiben (q,p) lokale Koordinaten des T^*M und $p_{|q} \in T_q{}^*M$, $p_{|q} : T_qM \to \mathbb{R}$ eine 1-Form. Der Einfachheit halber verwenden wir $x^i := q^i$ (und $x_{n+i} := p_i$).
Außerdem sei $\pi : T^*M \to M$ die natürliche Projektion, die Kotangentialvektoren auf ihre Fußpunkte abbildet und die lokal die Form $x^i \circ \pi \circ x^{-1}$ hat. Der Pushforward π_* von π bildet dann nach Definition die Tangentialräume aufeinander ab: $\pi_* : T(T^*M) \to TM$.
Für ein $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in T_p(T_q{}^*M)$ gilt dann lokal:

$$\pi_{*|p_{|q}}\xi := D\pi_{|p_{|q}}(\xi) = \xi^\alpha \tfrac{\partial(x^i \circ \pi \circ x^{-1})}{\partial x^\alpha}(x(p_{|q}))\tfrac{\partial}{\partial x^i_{|q}}$$

Da $p_{|q}$ eine 1-Form auf T_qM ist und $\pi_*\xi$ auf einen Vektor in T_qM abbildet, ist $(p_{|q} \circ \pi_*)(\cdot)$ eine 1-Form auf $T(T^*M)$, für die gilt:

$$\begin{aligned} p_{|q} \circ \pi_*\xi &= (p_{|q})_j dx^j \xi^\alpha \frac{\partial(x^i \circ \pi \circ x^{-1})}{\partial x^\alpha}(x(p_{|q}))\frac{\partial}{\partial x^i_{|q}} = (p_{|q})_j \xi^\alpha \frac{\partial(x^i \circ \pi \circ x^{-1})}{\partial x^\alpha}(x(p_{|q}))\delta^j_i \\ &= (p_{|q})_i \xi^\alpha \frac{\partial(x^i \circ \pi \circ x^{-1})}{\partial x^\alpha}(x(p_{|q})) =: \omega^1(\xi) \end{aligned}$$

Nun soll gezeigt werden, dass $\omega^1 = p_i dq^i$ gilt:
Dazu betrachte obige 1-Form nicht ausgewertet bei ξ, also $\omega^1(\cdot)$. Mit $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ ist dies:

$$\omega^1 = (p_{|q})_i \tfrac{\partial(x^i \circ \pi \circ x^{-1})}{\partial x^\beta}(x(p_{|q}))dx^\beta_{|p}$$

Nun ist aber der mittlere Term der Pushforward der natürlichen Projektion. $(x^i \circ \pi \circ x^{-1})$ bildet den Punkt $p_{|q}$ auf q^i ab. Die Ableitung nach x^β definiert dann ein Kronecker-Delta δ^i_β. Also folgt:

$$\omega^1 = p_i \delta^i_\beta dx^\beta_{|p} = p_i dx^i = p_i dq^i$$

Wobei hier verwendet wurde, dass $q^i = x^i$ ist.
Es folgt offensichtlich mit der Definition des äußeren Produktes und der Antisymmetrie des Dachproduktes, dass

$$\omega^2 = -d\omega^1.$$

Wegen $d^2 = 0$ ist ω^2 geschlossen. Dass ω^2 nicht ausgeartet ist folgt analog zum Beispiel 1.3.

2.2.1 Bem.: Die obige Konstruktion ist unabhängig von der verwendeten Karte

Die oben verwendeten Koordinaten q und p sind keineswegs unabhängig voneinander. In der Notation wird dies vor allen Dingen durch die gemeinsame Bezeichnung x als Kartenabbildung für das Kotangentialbündel deutlich. Wie bereits die Indexstellung in $\omega^2 = dq^i \wedge dp_i$ andeutet, transformieren die p und q genau invers zueinander. Transformiert q mit einer Jacobimatrix J, so transformiert p mit J^{-1}. Das heißt insbesondere, dass die obige Konstruktion vollkommen unabhängig von der verwendeten Karte auf das selbe Ergebnis führt.

2.2.2 Bem.: Der Phasenraum ist ein Kotangentialbündel

Betrachte ein Lagrange-System (M,L) mit Konfigurationsraum M und Lagrange-Funktion L. M definiert eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Koordinaten q^i. Es sind also $\dot{q}$ Tangentialvektoren von M. Die Lagrange-Funktion ist ein Kotangentialvektor, denn sie bildet Tangentialvektoren und Vektoren auf reelle Zahlen ab, $L \in T_{|q}{}^*M$. Also sind ebenso die konjugierten Impulse $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ Kotangentialvektoren.

Demnach ist der durch (q,p) definierte Phasenraum das Kotangentialbündel des Konfigurationsraumes. Nach dem Satz 2.2 ist der Phasenraum also eine symplektische Mannigfaltigkeit.

3 Hamiltonsche Vektorfelder

3.1 Def.: Inneres Produkt für p-Formen

Sei $\eta \in \Omega^p(M)$, $p \geq 1$ sowie $V \in \Gamma(TM)$ ein glattes Vektorfeld. Das innere Produkt von V mit η ist die $(p-1)$-Form $i_V\eta \in \Omega^{p-1}(M)$:

$$i_V\eta(W_1,\ldots,W_{p-1}) := \eta(V,W_1,\ldots,W_{p-1}) \quad \forall W_1,\ldots,W_{p-1} \in TM \tag{3.1}$$

3.2 Def.: Hamiltonsches Vektorfeld

Sei (M^{2n},ω^2) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir wollen im Folgenden jeder differenzierbaren Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes glattes Vektorfeld $X_f \in \Gamma(TM)$ zuordnen:

Zunächst erhalten wir mit $\omega^2 \in \Omega^2(M)$ über das innere Produkt mit einem Tangentialvektor $\xi \in T_pM$ eine 1-Form $\omega^1_\xi \in \Omega^1(M)$ wie folgt:

$$\omega^1_\xi(\eta) := i_\xi\omega^2(\eta) = \omega^2(\xi,\eta) \quad \forall \eta \in T_pM \tag{3.2}$$

Die Zuordung $\xi \to \omega^1_\xi$ bzw. $\omega^1_\xi \to \xi$ ist ein Isomorphismus zwischen T_pM und T^*_pM. Es lässt sich also auch zu einer 1-Form ω^1 auf T_pM ein zugehöriger Tangentialvektor aus T_pM finden. Insbesondere für $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M)$ muss es also (wegen des beschriebenen Isomorphismus) ein Vektorfeld $X_f \in \Gamma(TM)$ geben, sodass $\mathrm{d}f = i_{X_f}\omega^2$ gilt. X_f heißt das zur Funktion f gehörige Hamiltonsche Vektorfeld.

3.2.1 Bem.: X_f in lokalen Koordinaten

X_f lässt sich in lokalen Koordinaten wie folgt berechnen:

$$X^\nu_f = \omega^{\nu\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{3.3}$$

Dabei bezeichnet $\omega^{\nu\mu}$ die Inverse zu $\omega_{\nu\mu}$ aus 1.3. Dies folgt direkt aus der obigen Konstruktion und $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha$.

3.3 Satz: Cartan-Formel

Die Lie-Ableitung einer p-Form $\eta \in \Omega^p$ in Richtung V lässt sich wie folgt schreiben (ohne Beweis):

$$\mathcal{L}_V\eta = i_V(\mathrm{d}\eta) + \mathrm{d}(i_V\eta) \tag{3.4}$$

3.4 Lemma:

Für die Lie-Ableitung von ω^2 in Richtung von X_f gilt $\mathcal{L}_{X_f}\omega^2 = 0$, denn nach der Cartan-Formel gilt:

$$i_{X_f}(\underbrace{d\omega^2}_{=0}) + (\mathrm{d}(\underbrace{i_{X_f}\omega^2}_{=\mathrm{df}}) = \mathrm{d}^2 f = 0 \tag{3.5}$$

4 Die Poisson-Klammer

4.1 Def.: Poisson-Klammer

Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2n}, ω^2) ist die Poisson-Klammer die Abbildung:

$$\{\cdot,\cdot\}: \quad C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad \{f,g\} := \omega^2(X_f, X_g) \tag{4.1}$$

4.2 Eigenschaften der Poisson-Klammer

Beh.: Die Poisson-Klammer ist

(i) *antisymmetrisch*, d.h. $\{f,g\} = -\{g,f\} \quad \forall f,g \in C^\infty(M)$

(ii) $\mathbb{R}$-*bilinear*, d.h. $\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f,g\} + \mu\{f,h\}$, sowie $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\} \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M); \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

(iii) *derivativ*, d.h. $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M)$ und erfüllt die

(iv) *Jacobiidentität*, d.h. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M)$

Bew.:

(i) *(Antisymmetrie)* Folgt direkt aus der Schiefsymmetrie von ω^2.

(ii) *(Bilinearität)* Da bei der Bestimmung der Komponenten von X_f lediglich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \alpha = 1, \ldots, 2n$ eingehen, gilt zunächst $X_{\lambda f} = \lambda X_f$. Die Behauptung folgt dann aus der Bilinearität von ω^2.

(iii) *(Produktregel)* Nach Definition gilt für $f,g \in C^\infty(M)$:

$$\{f,g\} = \omega^2(X_f, X_g) = (i_{X_f}\omega^2)(X_g) = \mathrm{d}f(X_g) = X_g(f) = -X_f(g) \tag{4.2}$$

Aus der Produktregel für die Richtungsableitung folgt dann direkt:

$$\{f, gh\} = -X_f(gh) = -X_f(g)h - gX_f(h) = \{f,g\}h + g\{f,h\} \tag{4.3}$$

(iv) *(Jacobiidentität)* Hierfür verwenden wir den folgenden Zusammenhang zwischen Lie-Klammer und Lie-Ableitung (ohne Beweis). Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\eta \in \Omega^p(M)$ gilt:

$$i_{[X,Y]}\eta = \mathcal{L}_X(i_Y\eta) - i_Y(\mathcal{L}_X\eta) \tag{4.4}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f]$. Da die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]$ die Jacobiidentität erfüllt, folgt dann (analog zu (iii)) die Aussage. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
i_{X_{\{f,g\}}}\omega^2 &= \mathrm{d}\{f,g\} = \mathrm{d}(\omega^2(X_f, X_g)) = \mathrm{d}(i_{X_g} i_{X_f}\omega^2) + 0 \\
&= \mathrm{d}(i_{X_g} i_{X_f}\omega^2) + i_{X_g}\mathrm{d}(i_{X_f}\omega^2) \quad \text{, denn } 0 = \mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(i_{X_f}\omega^2) \\
&= \mathcal{L}_{X_g}(i_{X_f}\omega^2) - 0 \quad \text{(Cartan-Formel)} \\
&= \mathcal{L}_{X_g}(i_{X_f}\omega^2) - i_{X_f}(\mathcal{L}_{X_g}\omega^2) \quad \text{, denn nach Lemma 3.4 gilt } \mathcal{L}_{X_g}\omega^2 = 0 \\
&= i_{[X_g, X_f]}\omega^2 \quad \text{(vergleiche mit 4.4)}
\end{aligned}$$

Es folgt also $X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f]$ und damit die Jacobiidentität der Poisson-Klammer.