Flüsse, Fixpunkte, Stabilität

Proseminar: Theoretische Physik

Yannic Borchard

7. Mai 2014

Motivation

- Die hier entwickelten Formalismen erlauben es, Aussagen über das Verhalten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu treffen, ohne die Lösung explizit zu kennen.
- Dies ist insbesondere deshalb wertvoll, weil es teilweise keine analytischen Möglichkeiten zur exakten Bestimmung von Lösungen gibt.
- Um dynamische Systeme zu untersuchen, sind die hier eingeführten Grundbegriffe unerlässlich.

Motivation

- Der Fluss dient zur Analyse von gewöhnlichen Differentialgleichungen.
- Er beschreibt die zeitliche Entwicklung von Zuständen in Systemen.

Fluss

Definition

Sei $\Gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ eine Parametermenge, U $\subset \mathbb{R}^n$ offen.
Eine Abbildung ϕ: U $\times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ heißt Fluss, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\phi(x, t = 0) = Id(x) \quad \forall x \in U,$

(ii) $\phi(x, s + t) = \phi(x, s) \circ \phi(x, t) = \phi(\phi(x, t), s)$
$\forall x \in U, \forall s, t \in \Gamma,$

(iii) ϕ ist differenzierbar.

Fluss

Definition

Sei $\Gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ eine Parametermenge, U $\subset \mathbb{R}^n$ offen.
Eine Abbildung ϕ: U $\times\Gamma \to \mathbb{R}^n$ heißt Fluss, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\phi(x, t = 0) = Id(x) \quad \forall x \in U$,

(ii) $\phi(x, s + t) = \phi(x, s) \circ \phi(x, t) = \phi(\phi(x, t), s)$
$\forall x \in U, \forall s, t \in \Gamma$,

(iii) ϕ ist differenzierbar.

Bemerkung

- *(i), (ii)* $\Rightarrow \Gamma$ *ist mit* ϕ *eine Halbgruppe.*
- *Häufig ist* $\Gamma = \mathbb{R}_+$ *oder* $\Gamma = \mathbb{R}$.

Trajektorie

Definition

Die Menge $\{\phi(x,t) | t \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Orbit oder Trajektorie von x.

Trajektorie

Definition

Die Menge $\{\phi(x,t)|t \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Orbit oder Trajektorie von x.

- Notation: x als $x \epsilon \mathbb{R}^n$ ist ein Punkt. $x(\cdot) = x(x_0, \cdot) = \phi(x_0, \cdot)$ ist eine Bahnkurve.

Fluss auf Vektorfeld

- Gegeben sei eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $f : U \to \mathbb{R}^n$.
- f kann als Vektorfeld aufgefasst werden.
- Das Vektorfeld f erzeugt einen Fluss durch $\frac{d}{dt}(\phi(x,t)) = f(\phi(x,t))$.
- Der Fluss ordnet also jeder Anfangsbedingung $x(0)$ ihren zeitlichen Verlauf zu.
- Hierbei ist f autonom, d. h. $f \neq f(x,t)$, andernfalls wäre (ii) nicht erfüllt.
- Zu jedem zeitunabhängigen Potential $V(x)$ kann mittels $f(x) := -\mathrm{grad}\, V(x)$ ein entsprechendes Vektorfeld konstruiert werden.

Existenz und Eindeutigkeit

Theorem

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\dot{x} = f(x)$ mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, und $x(0) = x_0 \in U$. Dann existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\phi(x_0, \cdot) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $\varepsilon > 0$ in einer Umgebung um x_0.
Insbesondere gilt diese Lösung i.A. nur lokal.

Beispiel

- Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ und $x(0) = 0$ ein gegebenes Anfangswertproblem in einer Dimension.

Beispiel

- Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ und $x(0) = 0$ ein gegebenes Anfangswertproblem in einer Dimension.
- Offenbar ist f stetig differenzierbar. Folglich existiert lokal eine eindeutige Lösung.

Beispiel

- Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ und $x(0) = 0$ ein gegebenes Anfangswertproblem in einer Dimension.
- Offenbar ist f stetig differenzierbar. Folglich existiert lokal eine eindeutige Lösung.
- Separation der Variablen liefert:
  $x(t) = \tan(t)$.

Beispiel

- Sei $\dot{x} = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ und $x(0) = 0$ ein gegebenes Anfangswertproblem in einer Dimension.
- Offenbar ist f stetig differenzierbar. Folglich existiert lokal eine eindeutige Lösung.
- Separation der Variablen liefert:
  $x(t) = \tan(t)$.
- Offensichtlich divergiert die Lösung nach endlicher Zeit. Dies wird mit Blow-up genannt. Die Lösung ist für $t = -\frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{\pi}{2}$ nicht definiert. Sie gilt also nur für $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

1. Fluss

2. Fixpunkte und Stabilität

3. Ljapunov-Funktion

Motivation

- Wir betrachten nun das Verhalten des Flusses an auffälligen Punkten des Vektorfelds: Dort, wo es verschwindet.
- An solchen Punkten gibt es nur eine begrenzte Anzahl an Möglichkeiten für das Verhalten des Flusses.
- Es können also Aussagen über Lösungskurven gemacht werden, ohne diese explizit zu kennen.

Fixpunkte

- Im Folgenden betrachten wir das Verhalten des Flusses an kritischen Punkten.

Fixpunkte

- Im Folgenden betrachten wir das Verhalten des Flusses an kritischen Punkten.

Definition

Ein Fixpunkt (oder auch kritischer Punkt) ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, für den gilt $f(x) = \dot{x} = 0$.

Fixpunkte

- Im Folgenden betrachten wir das Verhalten des Flusses an kritischen Punkten.

Definition

Ein Fixpunkt (oder auch kritischer Punkt) ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, für den gilt $f(x) = \dot{x} = 0$.

- Anhand von Fixpunkten können Aussagen über die Stabilität von Lösungskurven gemacht werden.

Stabilität von Fixpunkten

Definition

Ein Fixpunkt $\tilde{x}$ heißt

- stabil, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \phi(x_0, t) \in B_\varepsilon(\tilde{x}) \quad \forall t \geq t_0$,

Stabilität von Fixpunkten

Definition

Ein Fixpunkt $\tilde{x}$ heißt

- stabil, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \phi(x_0, t) \in B_\varepsilon(\tilde{x}) \quad \forall t \geq t_0$,
- instabil, falls er nicht stabil ist,

Stabilität von Fixpunkten

Definition

Ein Fixpunkt $\tilde{x}$ heißt

- stabil, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \phi(x_0, t) \in B_\varepsilon(\tilde{x}) \quad \forall t \geq t_0$,
- instabil, falls er nicht stabil ist,
- attraktiv, falls $\exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \phi(x_0, t) = \tilde{x}$,

Stabilität von Fixpunkten

Definition

Ein Fixpunkt $\tilde{x}$ heißt

- stabil, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \phi(x_0, t) \in B_\varepsilon(\tilde{x}) \quad \forall t \geq t_0$,
- instabil, falls er nicht stabil ist,
- attraktiv, falls $\exists \delta > 0$, sodass
  $x(t_0) = x_0 \in B_\delta(\tilde{x}) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \phi(x_0, t) = \tilde{x}$,
- asymptotisch stabil, falls er stabil und attraktiv ist.

Sonderfall: Eine Dimension

In einer Dimension ist ein Fixpunkt entweder asymptotisch stabil oder instabil. Dies beruht auf der Lipschitz-Stetigkeit von f.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- Sei $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (DGL für harmonischen Oszillator).

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- Sei $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (DGL für harmonischen Oszillator).
- Dies schreiben wir um in ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- Sei $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (DGL für harmonischen Oszillator).
- Dies schreiben wir um in ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x$$

- Es gilt $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- Sei $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (DGL für harmonischen Oszillator).
- Dies schreiben wir um in ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x$$

- Es gilt $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$.
- Der Nullpunkt ist Fixpunkt des Systems.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

- Sei $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (DGL für harmonischen Oszillator).
- Dies schreiben wir um in ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\omega^2 x$$

- Es gilt $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$.
- Der Nullpunkt ist Fixpunkt des Systems.
- Lösung ist $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$ für entsprechende Anfangsbedingungen. Dies ist offenbar eine zyklische Lösung, da sich auf einer Ellipse um den Ursprung bewegt. Also ist der Ursprung stabil, aber nicht attraktiv.

Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz

Theorem

Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $k : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann $\exists ! \tilde{x}$ mit $k(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz

Theorem

Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $k : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann $\exists! \tilde{x}$ mit $k(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

- k ist ein diskreter Fluss $k^{(n)}(x) = \phi(x, n)$ mit Parametermenge $\Gamma = \mathbb{N}$.
- Der Fixpunkt $\tilde{x}$ ist offenbar asymptotisch stabil.

Motivation

- Bisher haben das Verhalten von Bahnkurven an Fixpunkten bestimmt, indem die Bahnkurve explizit bestimmt wurde.
- Im Folgenden wird eine Methode vorgestellt, mithilfe derer Fixpunkte allein durch Kenntnis des Vektorfeldes bzgl. ihrer Stabilität charakterisiert werden können.

Ljapunov-Funktion

Definition

Sei $\tilde{x}$ ein Fixpunkt von $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $V : U \supset W \to \mathbb{R}$ heißt Ljapunov-Funktion, falls gilt:

(i) $V(\tilde{x}) = 0$ und $V(x) > 0 \quad \forall x \neq \tilde{x}$,

(ii) $\dot{V}(x) := \langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0 \quad \forall x \in W \setminus \tilde{x}$.

Ljapunov-Funktion

Theorem

- *Existiert eine Ljapunov-Funktion von $f(x)$, so ist $\tilde{x}$ stabil.*
- *Gilt in (ii) sogar die strikte Ungleichung, so ist $\tilde{x}$ asymptotisch stabil.*

Ljapunov-Funktion

Theorem

- *Existiert eine Ljapunov-Funktion von $f(x)$, so ist $\tilde{x}$ stabil.*
- *Gilt in (ii) sogar die strikte Ungleichung, so ist $\tilde{x}$ asymptotisch stabil.*

Bemerkung

- *es gibt keine allgemeine Methode, um eine Ljapunov-Funktion zu finden.*
- *Oft ist die Energie Ljapunov-Funktion.*

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.
  - $V(0, 0) = 0$,

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.
  - $V(0, 0) = 0$,
  - $V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$,

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.
  - $V(0,0) = 0$,
  - $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$,
  - $\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} \rangle = \omega^2 xy - \omega^2 xy = 0$.

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.
  - $V(0, 0) = 0$,
  - $V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$,
  - $\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} \rangle = \omega^2 xy - \omega^2 xy = 0$.
- $V(x, y)$ ist eine Ljapunov-Funktion, aber nicht streng.

Der harmonische Oszillator reloaded

- Für den harmonischen Oszillator gilt:
  - $\dot{x} = y$,
  - $\dot{y} = -\omega^2 x$.
- Setze $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.
  - $V(0,0) = 0$,
  - $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$,
  - $\langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} \rangle =$ $\omega^2 xy - \omega^2 xy = 0$.
- $V(x,y)$ ist eine Ljapunov-Funktion, aber nicht streng.
- $(0,0)$ ist stabil, aber nicht attraktiv.

Zusammenfassung

- Der Fluss $\phi(x,t) = x(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems $\dot{x} = f(x)$.
- Dabei gilt: $\frac{d}{dt}\phi(x,t) = f(\phi(x,t))$.

Zusammenfassung

- Der Fluss $\phi(x,t) = x(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems $\dot{x} = f(x)$.
- Dabei gilt: $\frac{d}{dt}\phi(x,t) = f(\phi(x,t))$.
- Ist f lokal lipschitz-stetig, so existiert ein eindeutiger lokal Fluss ϕ.

Zusammenfassung

- Der Fluss $\phi(x,t) = x(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems $\dot{x} = f(x)$.
- Dabei gilt: $\frac{d}{dt}\phi(x,t) = f(\phi(x,t))$.
- Ist f lokal lipschitz-stetig, so existiert ein eindeutiger lokal Fluss ϕ.
- Fixpunkte $\tilde{x}$ ($:\Leftrightarrow f(\tilde{x}) = 0$) können stabil [attraktiv] sein, dann bleiben Trajektorien von Punkten nahe bei $\tilde{x}$ für alle Zeiten in der Nähe [konvergieren gegen $\tilde{x}$].

Zusammenfassung

- Der Fluss $\phi(x,t) = x(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systems $\dot{x} = f(x)$.
- Dabei gilt: $\frac{d}{dt}\phi(x,t) = f(\phi(x,t))$.
- Ist f lokal lipschitz-stetig, so existiert ein eindeutiger lokal Fluss ϕ.
- Fixpunkte $\tilde{x}$ ($:\Leftrightarrow f(\tilde{x}) = 0$) können stabil [attraktiv] sein, dann bleiben Trajektorien von Punkten nahe bei $\tilde{x}$ für alle Zeiten in der Nähe [konvergieren gegen $\tilde{x}$].
- Existiert eine [strenge] Ljapunov-Funktion zu $\tilde{x}$, so ist der Fixpunkt [asymptotisch] stabil.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Literatur

- *Guckenheimer & Holmes, - Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Kap.* 1
- *Prüss & Wilke - Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme, Kap.* 4,5
- *Strogatz - Nonlinear Dynamics and Chaos, Kap.* 2