

DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE  
PROSEMINAR: THEORETISCHE PHYSIK

Florian Döhle

2. Juli 2014

Video Chaotische Bewegung

Video Periodische Bewegung

- 1 MOTIVATION
- 2 AUFSTELLEN UND FIXPUNKTANALYSE DER  
ABBILDUNG
- 3 HUFEISEN-ABBILDUNG
- 4 HUFEISEN-ABBILDUNG IN DER DYNAMIK HÜPFENDER  
BÄLLE
- 5 SELTSAMEN ATTRAKTOR IN DER DYNAMIK  
HÜPFENDER BÄLLE

- pädagogischer Wert:
  - einfache, numerisch leicht zu berechnende Abbildung, die unglaublich große Vielfalt an nichtlinearen Verhaltensweisen zeigt (Sattel-Knoten-Bifurkation, Periodenverdopplung, Hufeisen-Abbildung, Seltsamer Attraktor)

- pädagogischer Wert:
  - einfache, numerisch leicht zu berechnende Abbildung, die unglaublich große Vielfalt an nichtlinearen Verhaltensweisen zeigt (Sattel-Knoten-Bifurkation, Periodenverdopplung, Hufeisen-Abbildung, Seltsamer Attraktor)
- praktischer Wert:
  - ingenieurstechnische Anwendungen

- 1 MOTIVATION
- 2 AUFSTELLEN UND FIXPUNKTANALYSE DER  
ABBILDUNG
- 3 HUFEISEN-ABBILDUNG
- 4 HUFEISEN-ABBILDUNG IN DER DYNAMIK HÜPFENDER  
BÄLLE
- 5 SELTSAMEN ATTRAKTOR IN DER DYNAMIK  
HÜPFENDER BÄLLE

# AUFSTELLEN DER ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

## ANNAHME 1:

Impulsbeziehung:  $V(t_j) - W(t_j) = -\alpha(U(t_j) - W(t_j))$

$V$  = Geschwindigkeit des Balles nach Aufprall

$U$  = Geschwindigkeit des Balles vor Aufprall

$W$  = Geschwindigkeit des Tisches

$t_j$  = Zeit des  $j$ -ten Aufpralls

$\alpha$  = Dämpfungsparameter

# AUFSTELLEN DER ABBILDUNG

## ANNAHME 1:

Impulsbeziehung:  $V(t_j) - W(t_j) = -\alpha(U(t_j) - W(t_j))$

$V$  = Geschwindigkeit des Balles nach Aufprall

$U$  = Geschwindigkeit des Balles vor Aufprall

$W$  = Geschwindigkeit des Tisches

$t_j$  = Zeit des  $j$ -ten Aufpralls

$\alpha$  = Dämpfungsparameter

## ANNAHME 2:

zurückgelegte Strecke des Balles  $\gg$  Auslenkung des Tisches

$\Rightarrow U(t_{j+1}) = -V(t_j)$



# AUFSTELLEN DER ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

BEWEGUNG DES TISCHES:

$$x(t) = -\beta \sin(\omega t)$$

# AUFSTELLEN DER ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

## BEWEGUNG DES TISCHES:

$$x(t) = -\beta \sin(\omega t)$$

## EINFÜHREN DIMENSIONSLOSER GRÖSSEN

$\phi = \omega t \hat{=}$  Phase des Tisches

$\nu = 2\omega \frac{V}{g} \hat{=}$  zusätzliche Phase durch Zeit zwischen Aufprällen

$\gamma = 2\omega^2(1 + \alpha) \frac{\beta}{g} \hat{=}$  Kraftamplitude

# AUFSTELLEN DER ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

## BEWEGUNG DES TISCHES:

$$x(t) = -\beta \sin(\omega t)$$

## EINFÜHREN DIMENSIONSLOSER GRÖSSEN

$\phi = \omega t \hat{=}$  Phase des Tisches

$\nu = 2\omega \frac{V}{g} \hat{=}$  zusätzliche Phase durch Zeit zwischen Aufprällen

$\gamma = 2\omega^2(1 + \alpha) \frac{\beta}{g} \hat{=}$  Kraftamplitude

## ABBILDUNG

$$f = f_{\alpha, \gamma} : \begin{pmatrix} \phi_{j+1} \\ \nu_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_j + \nu_j \\ \alpha \nu_j - \gamma \cos(\phi_j + \nu_j) \end{pmatrix}$$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha,\gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverse: } f_{\alpha,\gamma}^{-1} : \begin{pmatrix} \phi_{j-1} \\ v_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_j - \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \\ \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha,\gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverse: } f_{\alpha,\gamma}^{-1} : \begin{pmatrix} \phi_{j-1} \\ v_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_j - \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \\ \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobimatrix: } Df = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\phi_j + v_j) & \alpha + \gamma \sin(\phi_j + v_j) \end{bmatrix}$$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha,\gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverse: } f_{\alpha,\gamma}^{-1} : \begin{pmatrix} \phi_{j-1} \\ v_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_j - \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \\ \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobimatrix: } Df = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\phi_j + v_j) & \alpha + \gamma \sin(\phi_j + v_j) \end{bmatrix}$$

$$\text{Jacobideterminante: } \det(Df) = \alpha$$

- für den elastischen Fall  $\alpha = 1$  kann man zeigen, dass beschränkte periodische und aperiodische Orbits existieren



- für den elastischen Fall  $\alpha = 1$  kann man zeigen, dass beschränkte periodische und aperiodische Orbits existieren
- im Folgenden sei  $\alpha < 1$ , so gilt:

## THEOREM

*Alle Orbits sind beschränkt.*

# ANALYSE FÜR $\alpha < 1$

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## THEOREM

*Alle Orbits sind beschränkt.*

# ANALYSE FÜR $\alpha < 1$

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## THEOREM

*Alle Orbits sind beschränkt.*

## BEWEIS.

$$|v_{j+1}| = |\alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)| \leq \alpha |v_j| + \gamma$$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## THEOREM

*Alle Orbits sind beschränkt.*

## BEWEIS.

$$|v_{j+1}| = |\alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)| \leq \alpha |v_j| + \gamma$$

$\Rightarrow$  Falls  $|v_j| > \frac{\gamma}{1-\alpha}$ , so ist  $|v_{j+1}| < |v_j|$  □

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

## THEOREM

*Alle Orbits sind beschränkt.*

## BEWEIS.

$$|v_{j+1}| = |\alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)| \leq \alpha |v_j| + \gamma$$

$\Rightarrow$  Falls  $|v_j| > \frac{\gamma}{1-\alpha}$ , so ist  $|v_{j+1}| < |v_j|$  □

- d. h. alle Orbits gelangen immer wieder in Streifen begrenzt durch  $v_j = \pm \frac{\gamma}{1-\alpha}$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- $f$  ist invariant unter  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi \Rightarrow$  nehmen  $\phi$  modulo  $2\pi$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- $f$  ist invariant unter  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi \Rightarrow$  nehmen  $\phi$  modulo  $2\pi$
- suchen eine attraktive Menge  $A$ , d. h.  
 $\exists$  Umgebung  $U$  von  $A$  ( $A$  invariant) :  $f^n(U) \rightarrow A$  für  $n \rightarrow \infty$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- $f$  ist invariant unter  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi \Rightarrow$  nehmen  $\phi$  modulo  $2\pi$
- suchen eine attraktive Menge  $A$ , d. h.  
 $\exists$  Umgebung  $U$  von  $A$  ( $A$  invariant) :  $f^n(U) \rightarrow A$  für  $n \rightarrow \infty$
- mit dem Theorem ergibt sich die Trapping Region  
 $D = \{(\phi, v) : |v| \leq \epsilon + \frac{\gamma}{1-\alpha}\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$



## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- $f$  ist invariant unter  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi \Rightarrow$  nehmen  $\phi$  modulo  $2\pi$
- suchen eine attraktive Menge  $A$ , d. h.  
 $\exists$  Umgebung  $U$  von  $A$  ( $A$  invariant) :  $f^n(U) \rightarrow A$  für  $n \rightarrow \infty$
- mit dem Theorem ergibt sich die Trapping Region  
 $D = \{(\phi, v) : |v| \leq \epsilon + \frac{\gamma}{1-\alpha}\} \subset \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$
- damit haben wir attraktive Menge  $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(D)$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- durch Lösen von  $f(\bar{\phi}, \bar{v}) = (\bar{\phi}, \bar{v})$  erhält man die Fixpunkte

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N,$$

wobei  $N$  das größte  $n \in \mathbb{N}$  ist, sodass  $2N\pi(1 - \alpha) < \gamma$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- durch Lösen von  $f(\bar{\phi}, \bar{v}) = (\bar{\phi}, \bar{v})$  erhält man die Fixpunkte

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N,$$

wobei  $N$  das größte  $n \in \mathbb{N}$  ist, sodass  $2N\pi(1 - \alpha) < \gamma$

- für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$  existieren keine Fixpunkte

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

- durch Lösen von  $f(\bar{\phi}, \bar{v}) = (\bar{\phi}, \bar{v})$  erhält man die Fixpunkte

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N,$$

wobei  $N$  das größte  $n \in \mathbb{N}$  ist, sodass  $2N\pi(1 - \alpha) < \gamma$

- für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$  existieren keine Fixpunkte
- beschränken uns auf den Zweig  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix}$$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$



## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) > 0$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) > 0 \Rightarrow \tau > 0$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) > 0 \Rightarrow \tau > 0$
- $n < 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n > \pi$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) > 0 \Rightarrow \tau > 0$
- $n < 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n > \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) < 0$

## FIXPUNKTE

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right) \\ 2n\pi \end{pmatrix}$$

- zur Betrachtung der Stabilität benutze die Jacobimatrix

$$Df(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) & \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$$\Delta = \alpha > 0 \text{ und } \tau = 1 + \alpha + \gamma \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n)$$

- $\tau^2 > 4\Delta \quad \forall \gamma, \alpha$
- $n > 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) > 0 \Rightarrow \tau > 0$
- $n < 0 \Rightarrow \bar{\phi}_n > \pi \Rightarrow \sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) < 0$   
 $\Rightarrow \tau > 0$  für  $\gamma > 2\sqrt{n^2\pi^2(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}$ , sonst  $\tau < 0$

# FIXPUNKTANALYSE

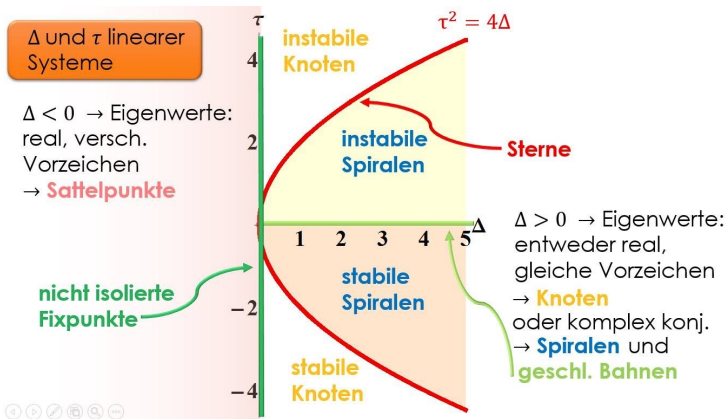


Abbildung: Fixpunktanalyse

## Schlussfolgerungen:

- keine Fixpunkte für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$
- $\bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten



## Schlussfolgerungen:

- keine Fixpunkte für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$
- $\bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma < 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist stabiler Knoten

## Schlussfolgerungen:

- keine Fixpunkte für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$
- $\bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma < 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist stabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma > 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten

## Schlussfolgerungen:

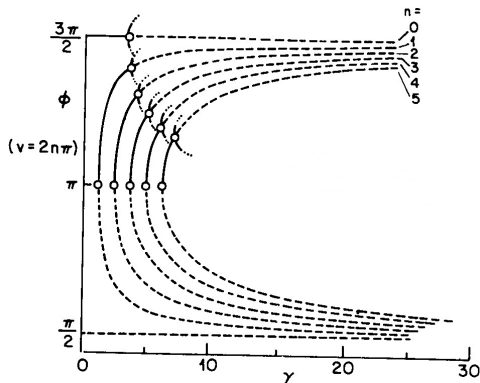
- keine Fixpunkte für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$
- $\bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma < 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist stabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma > 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- Bifurkationspunkte  $\gamma_n = 2n\pi(1 - \alpha)$   
(Sattel-Knoten-Bifurkation)  
und  $\gamma'_n = 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2}$

## Schlussfolgerungen:

- keine Fixpunkte für  $\gamma < 2n\pi(1 - \alpha)$
- $\bar{\phi}_n < \pi \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma < 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist stabiler Knoten
- $\bar{\phi}_n > \pi$  und  $\gamma > 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2} \Rightarrow (\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$  ist instabiler Knoten
- Bifurkationspunkte  $\gamma_n = 2n\pi(1 - \alpha)$   
(Sattel-Knoten-Bifurkation)  
und  $\gamma'_n = 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2}$
- berechnen von  $f(f(\phi_j, v_j)) = (\phi_j, v_j)$  zeigt, dass für  $\gamma > \gamma'_n$  zwei stabile Orbits mit Periode 2 existieren, d. h. bei  $\gamma'_n$  liegt eine Flip-Bifurkation vor

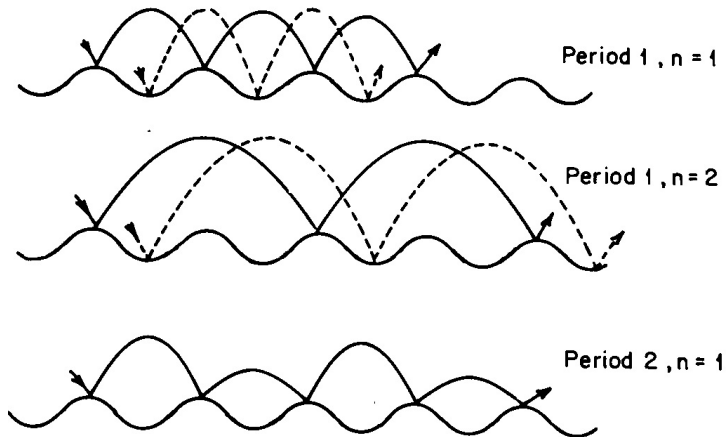
# BIFURKATIONS-DIAGRAMM

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



**Abbildung:** Bifurkationsdiagramm der Bewegungen der Periode 1 und 2 für  $\alpha = 0.9$  und  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5$ ,





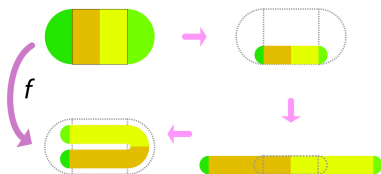
**Abbildung:** Exemplarische reale Bewegungen der Periode 1 und 2

- 1 MOTIVATION
- 2 AUFSTELLEN UND FIXPUNKTANALYSE DER  
ABBILDUNG
- 3 HUFEISEN-ABBILDUNG
- 4 HUFEISEN-ABBILDUNG IN DER DYNAMIK HÜPFENDER  
BÄLLE
- 5 SELTSAMEN ATTRAKTOR IN DER DYNAMIK  
HÜPFENDER BÄLLE



## DEFINITION

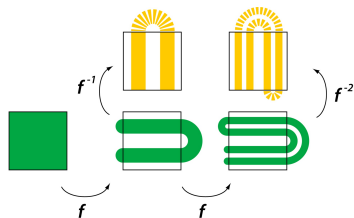
**Hufeisen-Abbildung:** Eine nichtlineare Abbildung  $f$  wird Hufeisen-Abbildung genannt, wenn diese die Urbildmenge in Form eines Quadrates zunächst staucht, dann streckt und schließlich zu einem Hufeisen formt.



**Abbildung:** Veranschaulichung der Hufeisen-Abbildung Abbildung

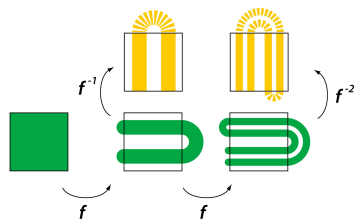
# HUFEISEN-ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



# HUFEISEN-ABBILDUNG

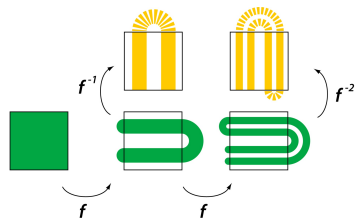
FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



- bei wiederholter Anwendung von  $f$  verlassen meiste Punkte das Ursprungsquadrat

# HUFEISEN-ABBILDUNG

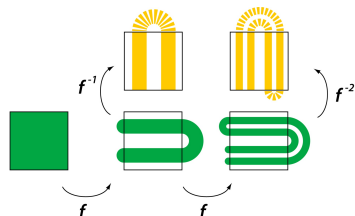
FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



- bei wiederholter Anwendung von  $f$  verlassen meiste Punkte das Ursprungsquadrat
- Punkte, die im Quadrat bleiben, bilden ein Fraktal

# HUFEISEN-ABBILDUNG

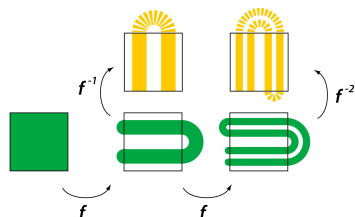
FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



- bei wiederholter Anwendung von  $f$  verlassen meiste Punkte das Ursprungsquadrat
- Punkte, die im Quadrat bleiben, bilden ein Fraktal
- inverse Abbildung bildet Hufeisen auf ein um 90 Grad gedrehtes Hufeisen ab

# HUFEISEN-ABBILDUNG

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



- bei wiederholter Anwendung von  $f$  verlassen meiste Punkte das Ursprungsquadrat
- Punkte, die im Quadrat bleiben, bilden ein Fraktal
- inverse Abbildung bildet Hufeisen auf ein um 90 Grad gedrehtes Hufeisen ab
- invariante Menge  $\Lambda$  erhält man durch  $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(\text{Quadrat})$

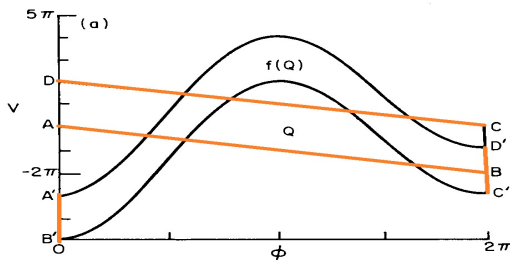
Video Hufeisen-Abbildung

- 1 MOTIVATION
- 2 AUFSTELLEN UND FIXPUNKTANALYSE DER  
ABBILDUNG
- 3 HUFEISEN-ABBILDUNG
- 4 HUFEISEN-ABBILDUNG IN DER DYNAMIK HÜPFENDER  
BÄLLE
- 5 SELTSAMEN ATTRAKTOR IN DER DYNAMIK  
HÜPFENDER BÄLLE

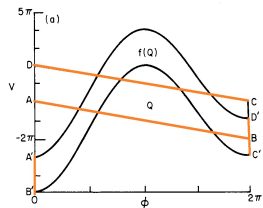
- im Folgenden sei der Einfachheit halber  $\alpha = 1$ , die Beschreibung der Dynamik in diesem Abschnitt gilt qualitativ auch für kleinere  $\alpha$



- im Folgenden sei der Einfachheit halber  $\alpha = 1$ , die Beschreibung der Dynamik in diesem Abschnitt gilt qualitativ auch für kleinere  $\alpha$
- betrachten Parallelogramm im  $(\phi, v)$ -Phasenraum mit Grenzen  $\phi + v = 0$  ( $AB$ ),  $\phi + v = 2\pi$  ( $CD$ ),  $\phi = 0$  ( $AD$ ),  $\phi = 2\pi$  ( $BC$ )



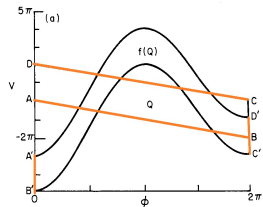
**Abbildung:** Entstehung eines Hufeisens bei  $\gamma = 3\pi$



**Abbildung:** Entstehung eines Hufeisens bei  $\gamma = 3\pi$

## ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

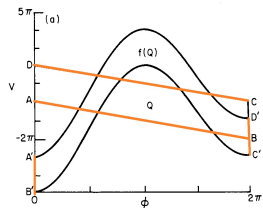


**Abbildung:** Entstehung eines Hufeisens bei  $\gamma = 3\pi$

- Bilder von Linien  $\phi + v = k$  sind vertikale Linien  $\phi = k, v \in [k - 2\pi - \gamma \cos k, k - \gamma \cos k]$

ABBILDUNG

$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$



## ABBILDUNG

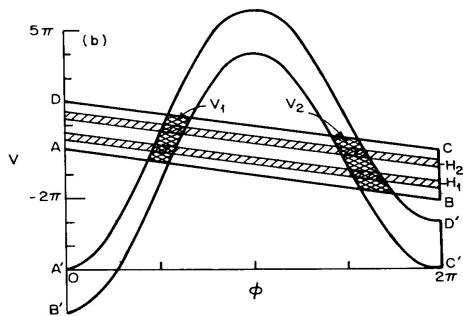
$$f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}$$

**Abbildung:** Entstehung eines Hufeisens bei  $\gamma = 3\pi$

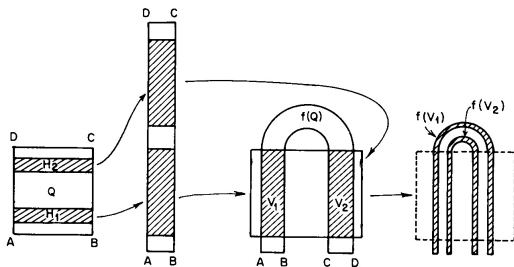
- Bilder von Linien  $\phi + v = k$  sind vertikale Linien  $\phi = k, v \in [k - 2\pi - \gamma \cos k, k - \gamma \cos k]$
- Bilder von vertikalen Linien  $\phi = 0$  und  $\phi = k$  sind Kurven  $v = \phi - \gamma \cos \phi$  und  $v = \phi - 2\pi - \gamma \cos \phi$

- falls  $\gamma$  groß genug ist wie in voriger Abbildung, so bilden  $Q \cap f(Q)$  zwei disjunkte Streifen  $V_1, V_2$

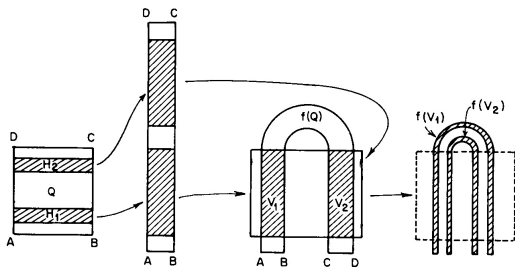
- falls  $\gamma$  groß genug ist wie in voriger Abbildung, so bilden  $Q \cap f(Q)$  zwei disjunkte Streifen  $V_1, V_2$
- Urbilder dieser disjunkter Streifen sind disjunkte horizontale Streifen  $H_1, H_2$



**Abbildung:** Entstehung disjunkter Streifen  $V_1, V_2$  bei  $\gamma = 5\pi$



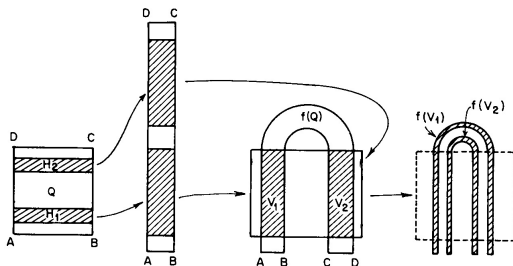
**Abbildung:** Qualitatives Verhalten von  $f$  bei genügend großem  $\gamma$



**Abbildung:** Qualitatives Verhalten von  $f$  bei genügend großem  $\gamma$

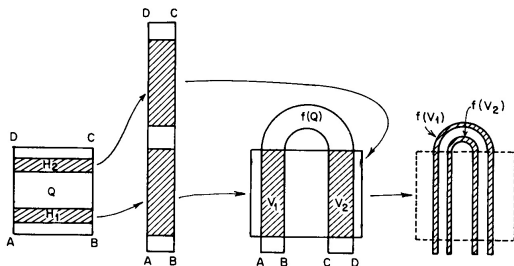
- haben für ausreichend große  $\gamma$  Hufeisen-Abbildung vorliegen





**Abbildung:** Qualitatives Verhalten von  $f$  bei genügend großem  $\gamma$

- haben für ausreichend große  $\gamma$  Hufeisen-Abbildung vorliegen
- gilt auch für kleinere  $\alpha$ , es muss dann  $\gamma$  höher gewählt werden



**Abbildung:** Qualitatives Verhalten von  $f$  bei genügend großem  $\gamma$

- haben für ausreichend große  $\gamma$  Hufeisen-Abbildung vorliegen
- gilt auch für kleinere  $\alpha$ , es muss dann  $\gamma$  höher gewählt werden
- allerdings machen wir nur Aussagen über Parallelogramme  $Q$

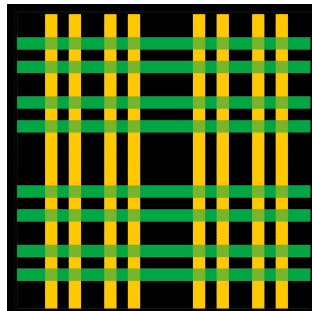
# INVARIANTE MENGE

## DEFINITION

$$\Lambda_v^n := \bigcap_{k=0}^n f^k(Q) \text{ (gelb)}$$

$$\Lambda_h^n := \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(Q) \text{ (grün)}$$

$$\Lambda := \Lambda_v^\infty \cap \Lambda_h^\infty$$



**Abbildung:** gegen invariante Menge konvergierende Menge

Haben damit unter  $f$  invariante Menge  $\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(Q)$

## THEOREM

## THEOREM

- (A) *Die unter  $f$  invariante Menge enthält eine abzählbare Menge periodischer Orbits aller Perioden.*

## THEOREM

- (A) *Die unter  $f$  invariante Menge enthält eine abzählbare Menge periodischer Orbits aller Perioden.*
- (B) *Alle periodischen Orbits liegen dicht in  $\Lambda$  und sind instabil.*

## THEOREM

- (A) *Die unter  $f$  invariante Menge enthält eine abzählbare Menge periodischer Orbits aller Perioden.*
- (B) *Alle periodischen Orbits liegen dicht in  $\Lambda$  und sind instabil.*
- (C) *Diese enthält eine überabzählbare Menge nichtperiodischer Orbits.*

## THEOREM

- (A) *Die unter  $f$  invariante Menge enthält eine abzählbare Menge periodischer Orbits aller Perioden.*
- (B) *Alle periodischen Orbits liegen dicht in  $\Lambda$  und sind instabil.*
- (C) *Diese enthält eine überabzählbare Menge nichtperiodischer Orbits.*
- (D) *Jeder Punkt von  $\Lambda$  kommt Punkt eines periodischen Orbits beliebig nahe (man sagt  $\Lambda$  enthält einen dichten Orbit).*



Was können wir durch das Theorem über die invariante Menge über die Dynamik unseres Systems aussagen?

Was können wir durch das Theorem über die invariante Menge über die Dynamik unseres Systems aussagen?

- $\Lambda$  ist kein Attraktor, da alle periodischen Orbits instabil sind

Was können wir durch das Theorem über die invariante Menge über die Dynamik unseres Systems aussagen?

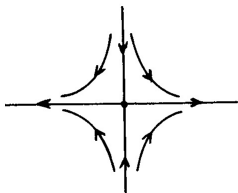
- $\Lambda$  ist kein Attraktor, da alle periodischen Orbits instabil sind
- in der Praxis ist es unmöglich zwischen unendlich langen periodischen Orbits und nichtperiodischen Orbits zu unterscheiden, da  $\Lambda$  dichten Orbit enthält

Was können wir durch das Theorem über die invariante Menge über die Dynamik unseres Systems aussagen?

- $\Lambda$  ist kein Attraktor, da alle periodischen Orbits instabil sind
- in der Praxis ist es unmöglich zwischen unendlich langen periodischen Orbits und nichtperiodischen Orbits zu unterscheiden, da  $\Lambda$  dichten Orbit enthält
- stabile Mannigfaltigkeit (das sind Punkte  $p$  mit  $\{f^n(p)\}$  asymptotisch zu  $\Lambda$  für  $n \rightarrow \infty$ ) verhält sich wie überabzählbare Menge von Separatrizen

Was können wir durch das Theorem über die invariante Menge über die Dynamik unseres Systems aussagen?

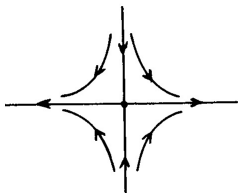
- $\Lambda$  ist kein Attraktor, da alle periodischen Orbits instabil sind
- in der Praxis ist es unmöglich zwischen unendlich langen periodischen Orbits und nichtperiodischen Orbits zu unterscheiden, da  $\Lambda$  dichten Orbit enthält
- stabile Mannigfaltigkeit (das sind Punkte  $p$  mit  $\{f^n(p)\}$  asymptotisch zu  $\Lambda$  für  $n \rightarrow \infty$ ) verhält sich wie überabzählbare Menge von Separatrizen  
⇒ starke Abhängigkeit von Anfangsbedingungen



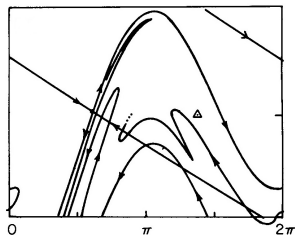
**Abbildung:** Separatrix eines Sattelpunktes

# FOLGERUNGEN AUS THEOREM

FLORIAN DÖHLE - DYNAMIK HÜPFENDER BÄLLE



**Abbildung:** Separatrix eines Sattelpunktes



**Abbildung:** Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten des Sattelpunktes mit  $n = +1$  für  $\alpha = 0.8$  und  $\gamma = 3.5$

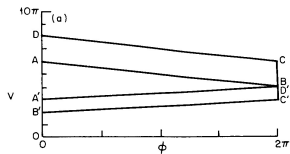
- 1 MOTIVATION
- 2 AUFSTELLEN UND FIXPUNKTANALYSE DER  
ABBILDUNG
- 3 HUFEISEN-ABBILDUNG
- 4 HUFEISEN-ABBILDUNG IN DER DYNAMIK HÜPFENDER  
BÄLLE
- 5 SELTSAMEN ATTRAKTOR IN DER DYNAMIK  
HÜPFENDER BÄLLE



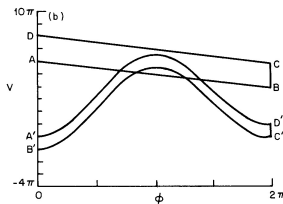
- wollen wie schon anfangs Abhängigkeit der Dynamik des Systems von  $\gamma$  betrachten, nun insbesondere den Übergang zur Hufeisen-Abbildung unter Perioden-Verdopplung (es ist nun wieder  $\alpha < 1$ )

# ERHÖHUNG VON $\gamma$

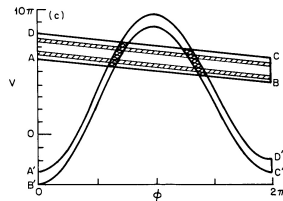
- wollen wie schon anfangs Abhängigkeit der Dynamik des Systems von  $\gamma$  betrachten, nun insbesondere den Übergang zur Hufeisen-Abbildung unter Perioden-Verdopplung (es ist nun wieder  $\alpha < 1$ )



**Abbildung:**  
 $\alpha = 0.5, \gamma = 0$



**Abbildung:**  
 $\gamma = 3\pi$



**Abbildung:**  
 $\gamma = 6\pi$

- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$

- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
⇒ Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)

- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
⇒ Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)
- hatten festgestellt, dass bei  $\gamma = \gamma'_n$  Flip-Bifurkation auftritt

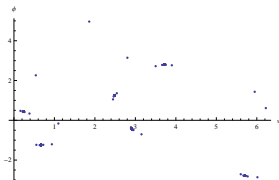
- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
 $\Rightarrow$  Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)
- hatten festgestellt, dass bei  $\gamma = \gamma'_n$  Flip-Bifurkation auftritt
- für größere  $\gamma$  treten weitere Flip-Bifurkationen auf: erhalten stabile Orbits mit Perioden  $2^n$

- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
⇒ Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)
- hatten festgestellt, dass bei  $\gamma = \gamma'_n$  Flip-Bifurkation auftritt
- für größere  $\gamma$  treten weitere Flip-Bifurkationen auf: erhalten stabile Orbits mit Perioden  $2^n$
- ist  $\gamma$  so groß, dass  $Q \cap f(Q)$  zwei disjunkte Streifen bilden, liegt Hufeisen vor (chaotisches Verhalten, kein Attraktor)

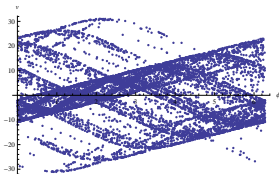
- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
 $\Rightarrow$  Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)
- hatten festgestellt, dass bei  $\gamma = \gamma'_n$  Flip-Bifurkation auftritt
- für größere  $\gamma$  treten weitere Flip-Bifurkationen auf: erhalten stabile Orbits mit Perioden  $2^n$
- ist  $\gamma$  so groß, dass  $Q \cap f(Q)$  zwei disjunkte Streifen bilden, liegt Hufeisen vor (chaotisches Verhalten, kein Attraktor)
- für  $\gamma'_n < \gamma < \gamma_n^h$ , wobei ab  $\gamma_n^h$  das Hufeisen vorliegt, müssen unendlich viele Flip-Bifurkationen stattfinden (vgl. Logistische Abbildung)



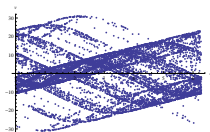
- bei Erhöhen von  $\gamma$  erreicht die Mitte von  $f(Q)$  bei  $(\phi, \nu) = (\pi, 2n\pi)$  die Linie  $\nu = 2n\pi$ , wobei  $\gamma = 2n\pi(1 - \alpha) = \gamma_n$   
 $\Rightarrow$  Sattel-Knoten-Bifurkation liegt vor (stabile und instabile Fixpunkte entstehen)
- hatten festgestellt, dass bei  $\gamma = \gamma'_n$  Flip-Bifurkation auftritt
- für größere  $\gamma$  treten weitere Flip-Bifurkationen auf: erhalten stabile Orbits mit Perioden  $2^n$
- ist  $\gamma$  so groß, dass  $Q \cap f(Q)$  zwei disjunkte Streifen bilden, liegt Hufeisen vor (chaotisches Verhalten, kein Attraktor)
- für  $\gamma'_n < \gamma < \gamma_n^h$ , wobei ab  $\gamma_n^h$  das Hufeisen vorliegt, müssen unendlich viele Flip-Bifurkationen stattfinden (vgl. Logistische Abbildung)
- haben dann seltsamen Attraktor vorliegen



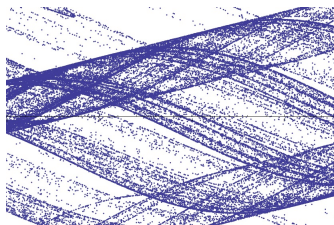
**Abbildung:** 10000 Iterationen von  $f$  bei  $\alpha = 0.8$  und  $\gamma = 1.68$



**Abbildung:** 10000 Iterationen von  $f$  bei  $\alpha = 0.8$  und  $\gamma = 10$



**Abbildung:** 10000 Iterationen von  $f$  bei  $\alpha = 0.8$  und  $\gamma = 10$



**Abbildung:** Vergrößerung von 100000 Iterationen von  $f$  bei  $\alpha = 0.8$  und  $\gamma = 10$

Wir haben an der Dynamik hüpfender Bälle beobachtet:

Wir haben an der Dynamik hüpfender Bälle beobachtet:

- im inelastischen Fall sind alle Bahnen beschränkt, für sehr kleine Kraftamplituden der Tischschwingung existieren keine Fixpunkte, ab  $\gamma_n$  existiert ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt (Sattel-Knoten-Bifurkation)

Wir haben an der Dynamik hüpfender Bälle beobachtet:

- im inelastischen Fall sind alle Bahnen beschränkt, für sehr kleine Kraftamplituden der Tischschwingung existieren keine Fixpunkte, ab  $\gamma_n$  existiert ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt (Sattel-Knoten-Bifurkation)
- eine Hufeisen-Abbildung ist typisch für chaotisches Verhalten, auch hier liegt eine Hufeisen-Abbildung ab  $\gamma_n^h$  vor

Wir haben an der Dynamik hüpfender Bälle beobachtet:

- im inelastischen Fall sind alle Bahnen beschränkt, für sehr kleine Kraftamplituden der Tischschwingung existieren keine Fixpunkte, ab  $\gamma_n$  existiert ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt (Sattel-Knoten-Bifurkation)
- eine Hufeisen-Abbildung ist typisch für chaotisches Verhalten, auch hier liegt eine Hufeisen-Abbildung ab  $\gamma_n^h$  vor
- ab  $\gamma'_n$  treten unendlich viele Flip-Bifurkationen auf und es entsteht ein seltsamer Attraktor

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

## QUELLEN

- John Guckenheimer, Philip Holmes: "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields"
- Wikipedia
- chaos-math.org
- [youtube.com/watch?v=pnHtuilMgTY](https://www.youtube.com/watch?v=pnHtuilMgTY)