Bifurkationen

Schiden Yohannes
14.05.14

Gliederung

1. Einführung

- bisherige Ergebnisse der Dynamik eines Vektorfeldes beschränkte sich auf zwei Möglichkeiten
  1) Übergang in eine Gleichgewichtslage
  2) Übergang zu $\pm\infty$

- Interessant: Was passiert wenn wir das System in Abhängigkeit eines Parameters betrachten ?

- durch Variation des Parameters können Fixpunkte entstehen oder zerstört werden oder ihre Stabilität ändert sich

- diese Änderungen in der Dynamik werden als **Bifurkationen** bezeichnet und die Parameterwerte unter den sie entstehen **Bifurkationspunkte**

- somit können Bifurkationen Modelle für Übergänge und Instabilität, bei Abhängigkeit eines Kontrollparameters, liefern

- Beispiel: Knicken eines Stabes

2. Sattel-Knoten-Bifurkation

- stellt eine grundlegende Bifurkation dar, in der Fixpunkte entstehen und zerstört werden
- bei Variation des Parameters laufen zwei Fixpunkte aufeinander zu, kollidieren und zerstören sich gegenseitig
- ein prototypisches Beispiel einer solchen Bifurkation ist gegeben durch:

$$x' = r + x^2$$

2.1 Bifurkationsdiagramme

- es gibt mehrere Möglichkeiten eine Bifurkation darzustellen
- bei der Darstellung werden die Fixpunkte für verschiedene Werte für r aufgetragen
- Konvention: durchgezogene Linie für stabile Fixpunkte und gestrichelt für instabile
- die häufigste Darstellung ist, dass man x in Abhängigkeit von r darstellt, da r die unabhängige Variable ist und deshalb horizontal geplottet werden soll
- diese Darstellung bezeichnet man als **Bifurkationsdiagramm**

2.2 Normalformen

- in gewisser Weise werden alle Sattel-Knoten-Bifurkationen repräsentiert durch: $x' = r - x^2 \; oder \; x' = r + x^2$
- dies wird als Normalform bezeichnet
- der Grund dafür ist, dass in der Nähe der Bifurkation, sich die Dynamik wie die Normalform verhält
- z.B. $x' = r - x - \mathrm{e}^{-x}$
- betrachten der Taylorreihe:

$$x' = r - x - \mathrm{e}^{-x}$$

$$x' = r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right]$$

$$x' = (r-1) - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

- es hat die gleiche algebraische Form und ist identisch, wenn man die x und r reskaliert

- dass Sattel-Knoten-Bifurkationen diese Form haben, lässt sich graphisch erklären
- damit eine solche Bifurkation vorliegt, müssen zwei Fixpunkte kollidieren und verschwinden, bei Variation von r
- damit braucht man zwei benachbarte Nullstellen von x', also muss besitzt es in der Nähe der Bifurkation eine parabolische Form
- betrachten des Verhalten nahe der Bifurkation:
- bei Variation von r liegen zuerst Schnittpunkte vor, dann wird sie zur Tangente der x-Achse und dann liegt kein Schnittpunkt mehr vor
- dies entspricht aber gerade dem Verhalten der Normalform

3. Transkritische Bifurkation

- stellt eine Bifurkation dar, in der bestimmte Fixpunkte für alle Parameterwerte existieren
- es ist jedoch möglich, dass sie ihre Stabilität ändern
- Normalform: $x' = rx - x^2$
- es findet ein Austausch von Stabilitäten statt
- Anmerkung : nach der Bifurkation verschwinden die Fixpunkte nicht, sie tauschen lediglich ihre Stabilität

3.1 Laserschwelle

- man betrachtet ein extrem vereinfachtes Modell eines Lasers:

  ein Laser, der eine Ansammlung spezieller Atome, eingebettet in einen Festkörper, beinhaltet, abgegrenzt durch teilweise reflektierende Spiegel

- Physikalischer Hintergrund:

  eine externe Energiequelle wird benutzt, um die Atome aus ihrem Grundzustand anzuregen

  ist die eingeführte Energie („Pumpen“) relativ schwach kommt es zur Emission von Licht zufälliger Phase (Lampe)

  erhöht man das Pumpen, passiert zunächst nichts, aber überschreitet es einem bestimmten Wert beginnen die Atome in Phase zu oszillieren, was dazu führt, dass ein viel kohärenteres Licht erzeugt wird (Laser)

  für eine genauere Erklärung des Laserphänomens müsste man die Quantenmechanik mit einbeziehen

- Betrachtung eines vereinfachten Modells der wesentlichen Physik:

  Annahmen:

  die dynamische Variable n(t) beschreibt die Anzahl der Photonen und N(t) die Anzahl der angeregten Atome

  $$n' = gain - loss = GnN - kn$$

  Änderungsrate:

  gain Term: entsteht durch stimulierte Emission: Photonen stimulieren angeregte Atome weitere Photonen zu emittieren

  dieser Prozess entsteht bei zufälligem Aufeinandertreffen von Photonen und angeregten Atomen, also bei einer Rate proportional zu n und N, mit dem Gain-Koeffizient $G > 0$

  loss-Term: entsteht durch Verlassen der Photonen des Lasers, wobei $k > 0$

  eine Konstante beschreibt, deren Kehrwert die typische Aufenthaltszeit eines Photons im Laser beschreibt

- Die Idee ist jetzt:

  N(t) wird kleiner bei Emission von Photonen

  damit können wir eine Gleichung aufschreiben bei der N von n abhängt

  unter der Annahme, dass in Abwesenheit des Lasereffekts, das Pumpen die angeregten Atome bei einem konstanten Wert hält, wird die Anzahl beim Lasereffekt reduziert

$$N(t)=N_0-\alpha n$$

- $\alpha > 0$ der Rate, mit der Atome wieder in ihren Grundzustand fallen

$$n'=Gn(N_0-\alpha n)-kn$$
$$n'=(GN_0-k)n-(\alpha G)n^2$$

- jetzt haben wir eine Differentialgleichung 1.Ordnung, die wir untersuchen können
- dazu tragen wir das Vektorfeld für verschiedene Werte der Pumpstärke(N_0) auf

- Ergebnisse unseres Modells:

  wenn $N_0 < \frac{k}{G}$ existiert ein stabiler Fixpunkt bei n = 0

  d.h. es liegt keine stimulierte Emission vor und es verhält sich wie eine Lampe

  bei $N_0 = \frac{k}{G}$ entsteht im System eine transkritische Bifurkation

  erhöhen wir jetzt die Pumpstärke N_0 verliert der Ursprung seine Stabilität und es entsteht ein stabiler Fixpunkt bei $n = (GN_0 - k)/\alpha G$ was zum Lasereffekt führt

  deshalb kann man in diesem Modell $N_0 = \frac{k}{G}$ als Laserschwelle interpretieren

  obwohl dieses Modell korrekt die Existenz einer solchen Schwelle voraussagt, vernachlässigt es z.B. spontane Emission und weitere Komplikationen

3.4 Pitchfork Bifurkation

- tritt bei physikalischen Problemen mit Symmetrien auf
- Fixpunkte entstehen und verschwinden in symmetrischen Paaren
- Beispiel: Knicken eines Stabes
- es gibt zwei verschiedene Arten von Pitchfork Bifurkationen:

1) **Superkritische Pitchfork Bifukation**
2) **Subkritische Pitchfork Bifurkation**

1) Superkritische Pitchfork Bifurkation:

- Normalform: $x' = rx - x^3$
- ist invariant unter der Variablenänderung: x → -x
- diese Invarianz drückt sich durch die Symmetrie aus
- der kubische Term wirkt stabilisierend, wie man anhand des Bifurkationsdiagramms erkennt

2) Subkritische Bifurkation:

- Normalform: $x' = rx + x^3$
- hier wirkt der kubische Term destabilisierend, erkennbar anhand des Bifurkationsdiagramms
- in realen physikalischen Systemen wird eine solche explosive Instabilität entgegengewirkt durch Terme höherer Ordnung
- Normalform: $x' = rx + x^3 - x^5$
- für kleine x haben wir den vorherigen Effekt
- durch den Term höherer Ordnung wird die Instabilität an einem bestimmten Punkt stabil und bleibt es auch für alle Parameterwerte
- die Koexistenz zweier stabiler Fixpunkte erlaubt für die Zustände des Systems Sprünge zu Stabilitäten sowie Hysterese: Irreversibilität von Zustandsänderungen bei Variation von r

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!