LINEARE SYSTEME PHASEN-EBENEN FIXPUNKT-ANALYSE

Proseminar: Theoretische Physik

Kerstin Beer – 21.05.2014 – Sommersemester 2014

MOTIVATION

- Lineares System ist ein Spezialfall
- nicht-lineare Systeme sind schwer zu lösen
- Techniken der Linearisierung
- Fixpunkte qualitativ betrachten und veranschaulichen
- Ablesen von Eigenschaften des Systems allein durch Matrix-Eigenschaften

GLIEDERUNG

1. Lineare Systeme
2. Phasen-Ebenen
3. Fixpunkt-Analyse
4. Linearisierung
5. Schlussfolgerungen

LINEARE SYSTEME

BEISPIEL 1: GLEICHUNGSSYSTEM

$x(t)$ Population von **Hasen**

$y(t)$ Population von **Schafen**

Tierarten teilen sich Lebensraum und Nahrung

Gekoppeltes Gleichungssystem:

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

DEFINITION: **LINEARES SYSTEM**

Zweidimensionales Lineares System

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

ungekoppelte Systeme: $b = 0, c = 0$

Matrix-Schreibweise $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{A}\, \mathbf{x}$

DEFINITION: **EIGENWERT/-VEKTOR**

Eigenwertgleichung $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}$

Eigenwert λ

Charakteristische Gleichung

$$det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\tau = \boldsymbol{Spur}(A) = a + d$$

$$\Delta = \boldsymbol{Det}(A)\, ad - bc$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Bestimmung des Eigenvektors:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

BEISPIEL 2: EIGENVEKTOREN

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

➡ $\lambda_1 = 2 , \lambda_2 = -3$

für $\lambda_1 = 2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

für $\lambda_2 = -3 : \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$

➡

Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG DES LINEAREN SYSTEMS

$$x(t) = \mathrm{c}_{1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_{2}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}e^{-3t}$$

mit Anfangsbedingungen $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

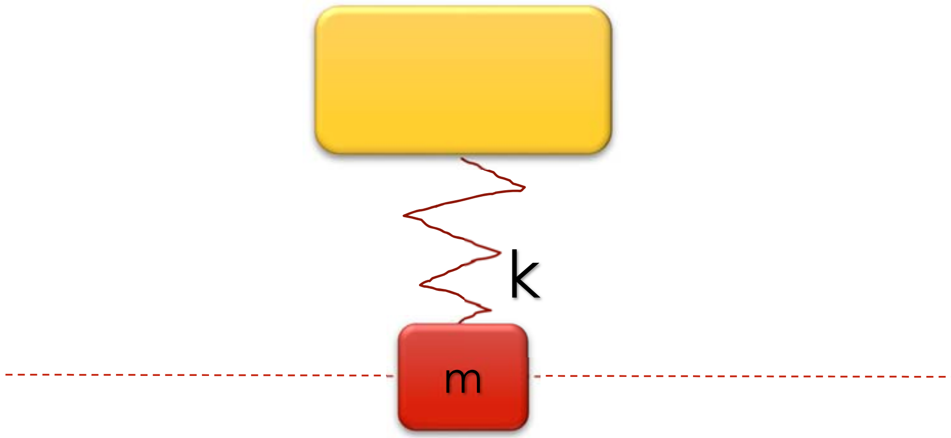
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{-2t} + e^{-3t} \\ y(t) &= e^{2t} - 4e^{-3t} \end{aligned}$$

Lineare
Systeme sind
**sehr einfach
zu lösen**!

BEISPIEL 3: HARMONISCHER OSZILLATOR

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}\mathrm{x} = -\omega^2 x$$



PHASEN-EBENEN

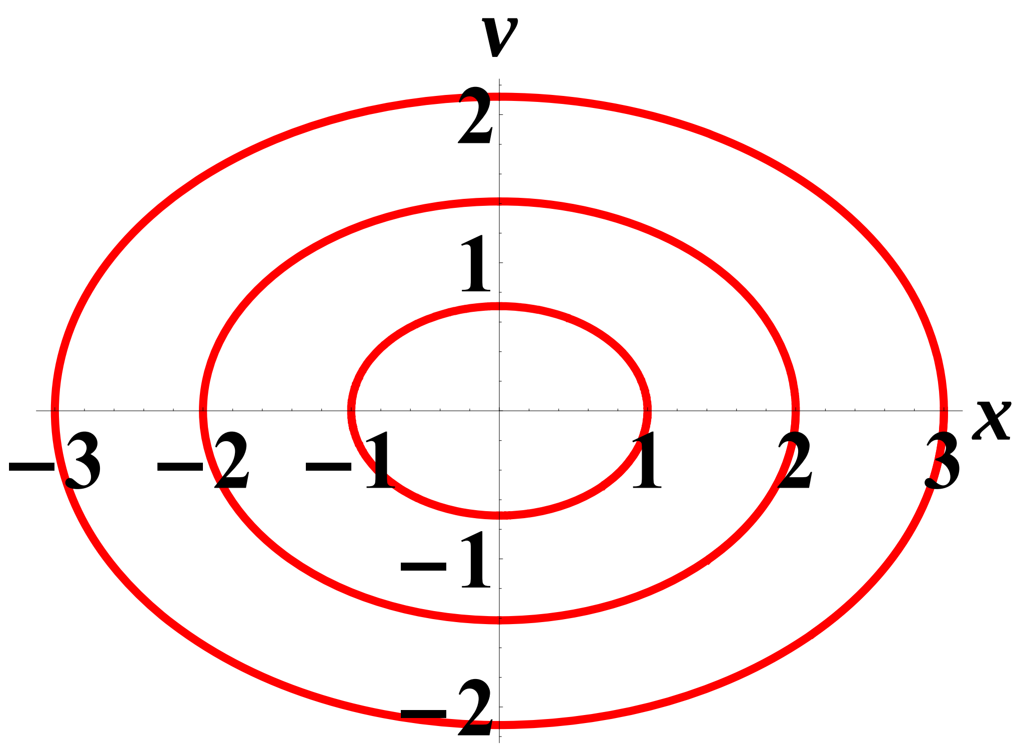
DEFINITION: **PHASEN-EBENEN**

zeigen alle Lösungsmöglichkeiten eines Gleichungssystems

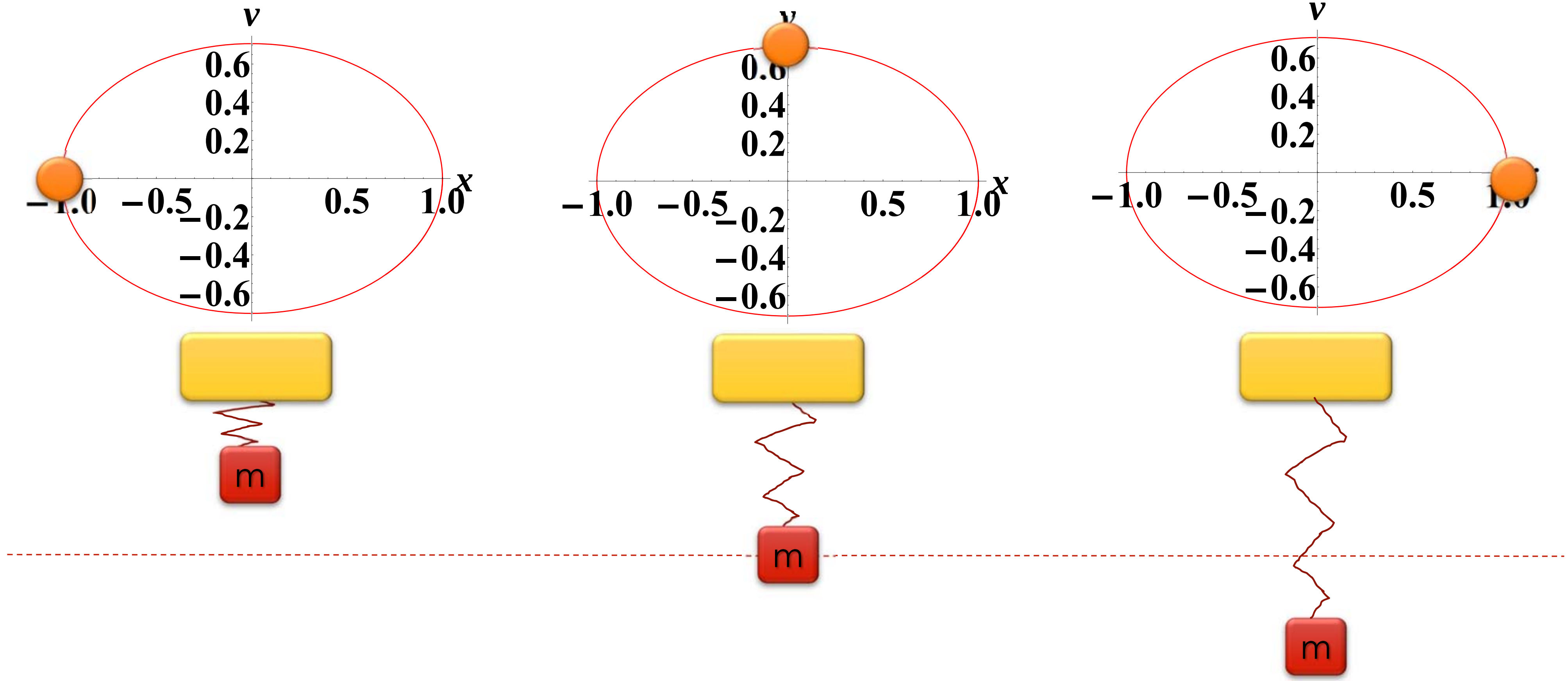
z.B. Lösung von $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\omega^2 x$$
$$x(0) = c$$
$$v(0) = 0$$

mit $c = 1, 2, 3$ und $\omega = 0.5$



BEISPIEL 3: HARMONISCHER OSZILLATOR

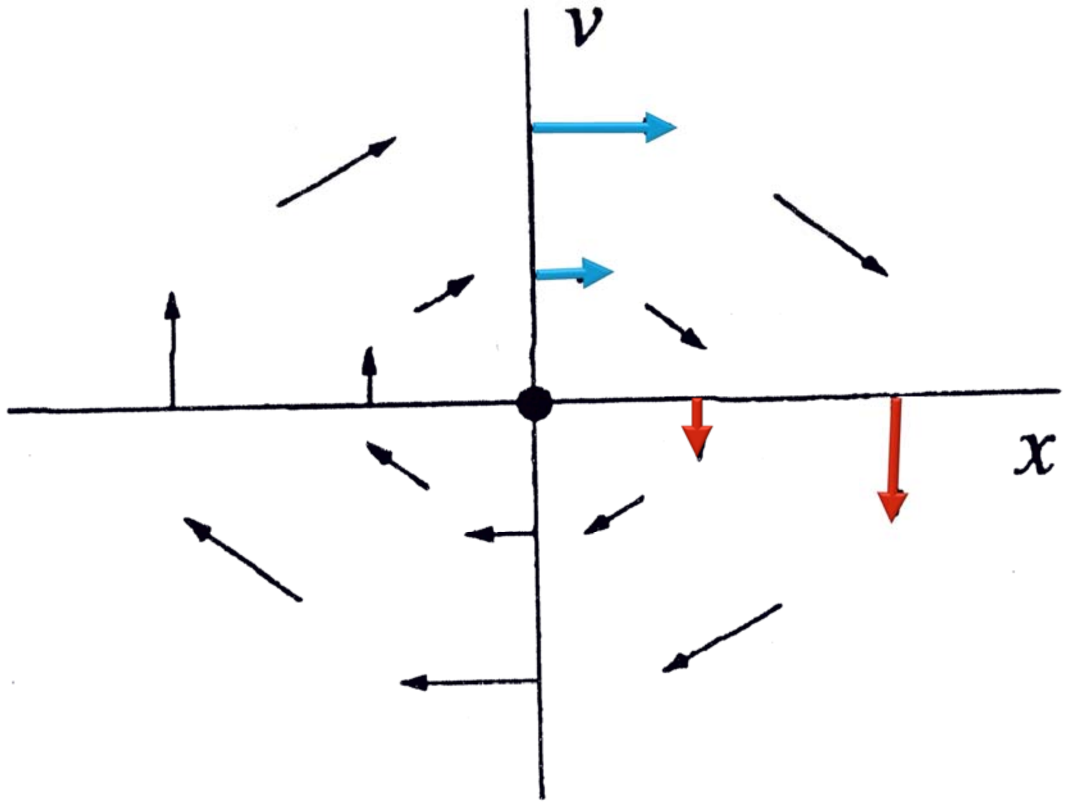


PHASENEBENE QUALITATIV ZEICHNEN

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$

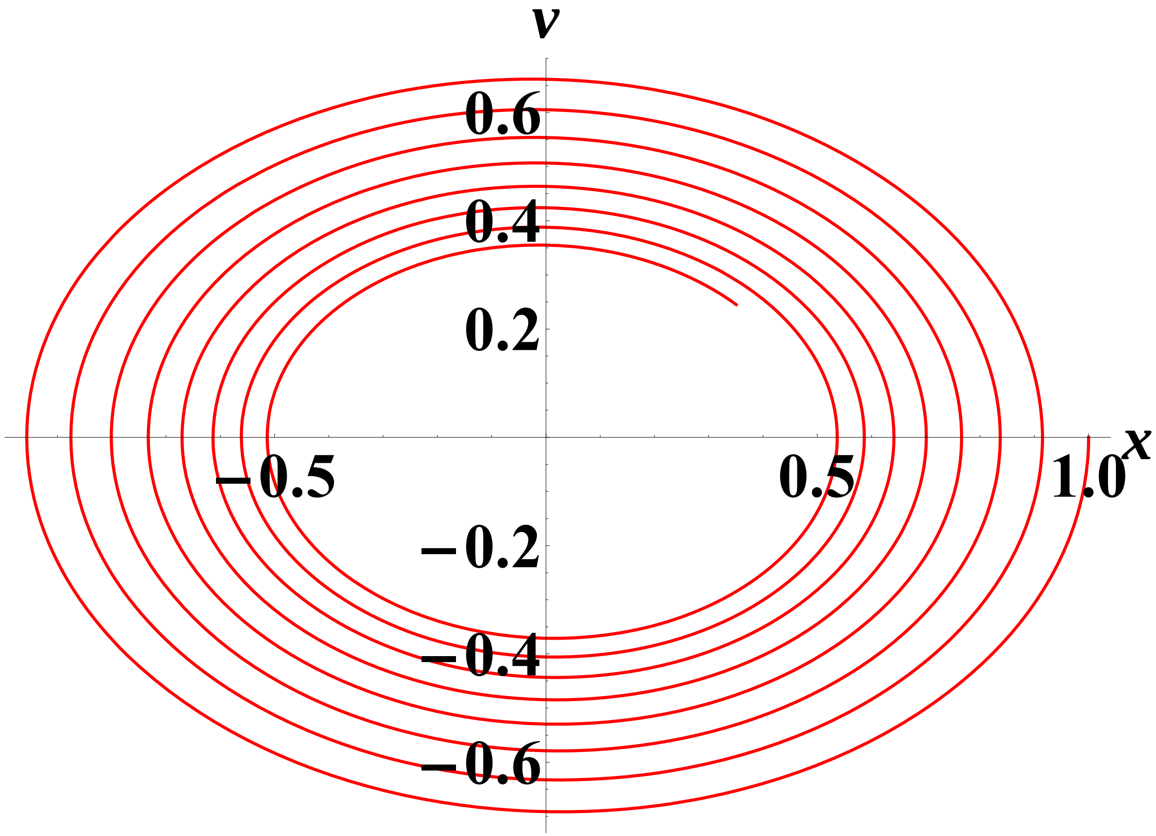
Für größere x werden Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$ länger

Für größere v werden Vektoren $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ länger



GEDÄMPFTER OSZILLATOR

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\omega^2 x - \gamma v$$



THEOREM: **EXISTENZ** UND **EINDEUTIGKEIT**

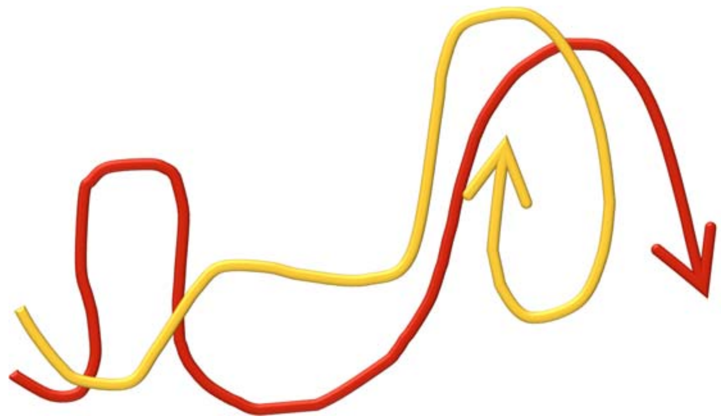
Anfangsproblem $\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$

f und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n$ sind **stetig**

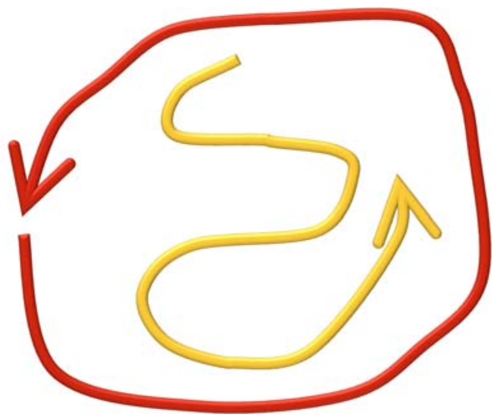
Lösung für Trajektorie $x(t)$ existiert und ist eindeutig

FOLGERUNGEN AUS THEOREM

Trajektorien überschneiden sich **nie**



Trajektorie bleibt in abgeschlossener Bahn **gefangen**



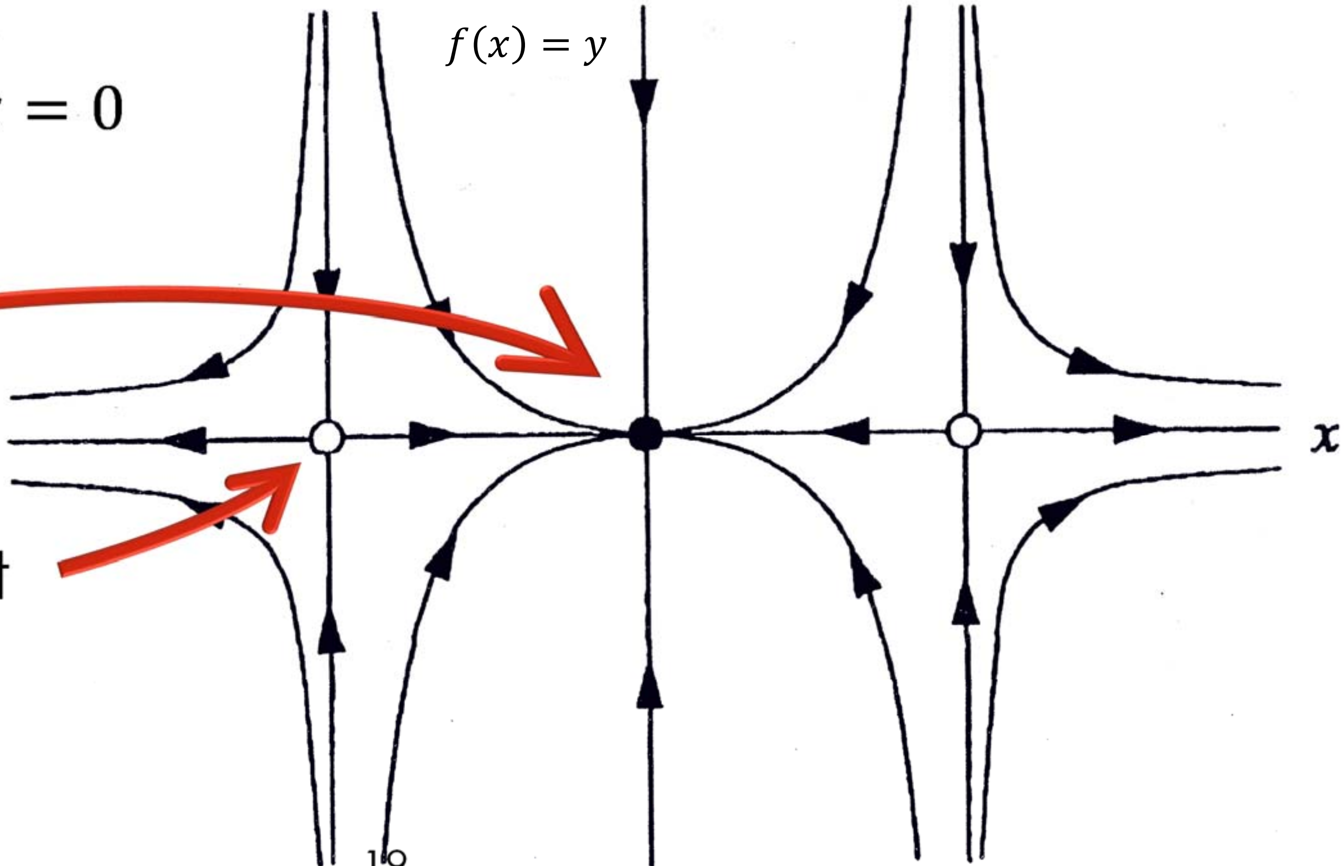
FIXPUNKT-ANALYSE

FIXPUNKTE

Fixpunkt $f(x) = \dot{x} = 0$

Stabiler Fixpunkt

Instabiler Fixpunkt



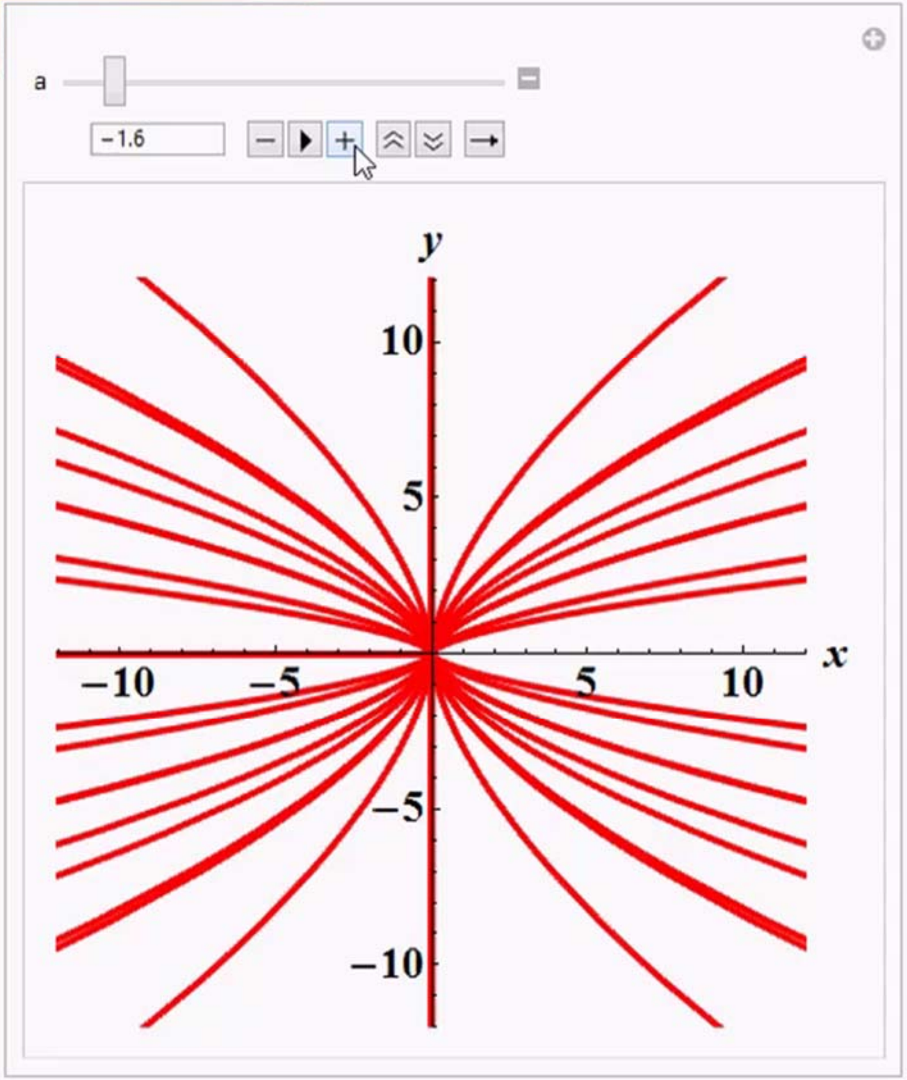
BEISPIEL 4: FIXPUNKT-ANALYSE

Lineares System $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Lösung $x(t) = x_0 e^{at}$

$y(t) = y_0 e^{-t}$

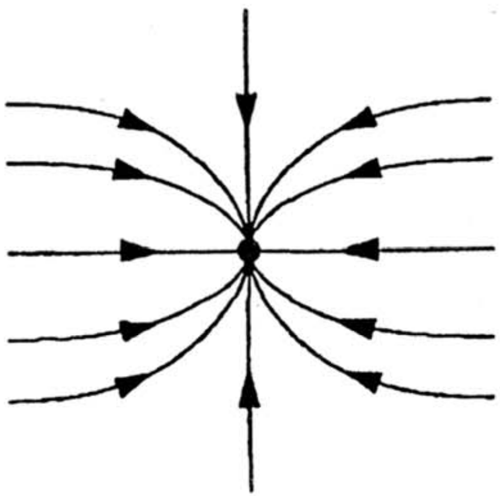
$$x(t) = x_0 e^{at}$$
$$y(t) = y_0 e^{-t}$$



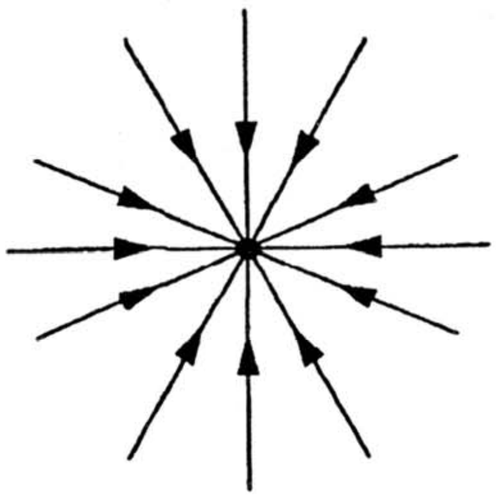
Plot von
$a = -2$ bis
$a = 2$

Knoten

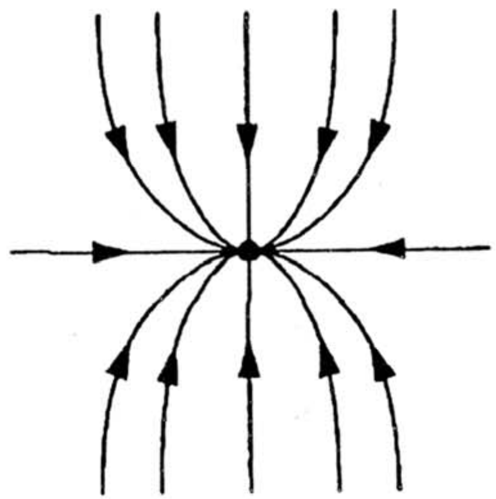
Stern



$a < -1$

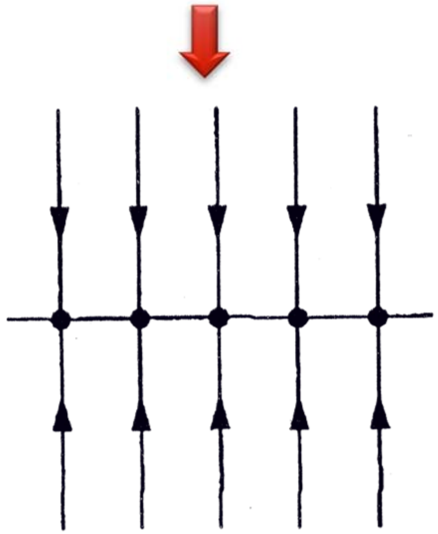


$a = -1$



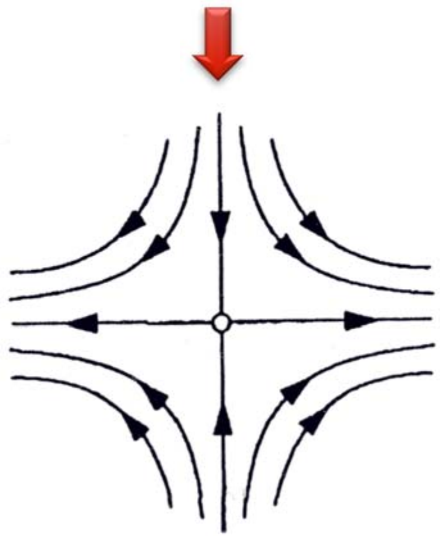
$-1 < a < 0$

Linie aus Fixpunkten
(nicht-isolierte Fixpunkte)



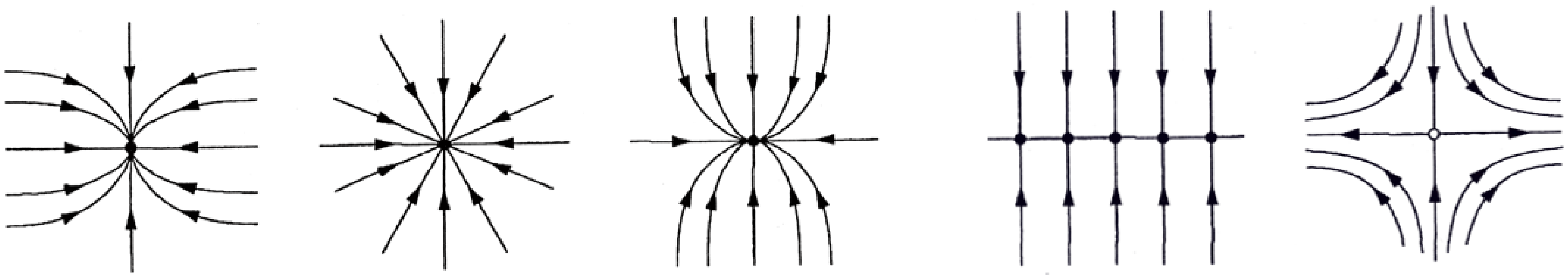
$a = 0$

Sattelpunkt



$a > 0$

ÜBERTRAGUNG: ALLG. LINEARES SYSTEM

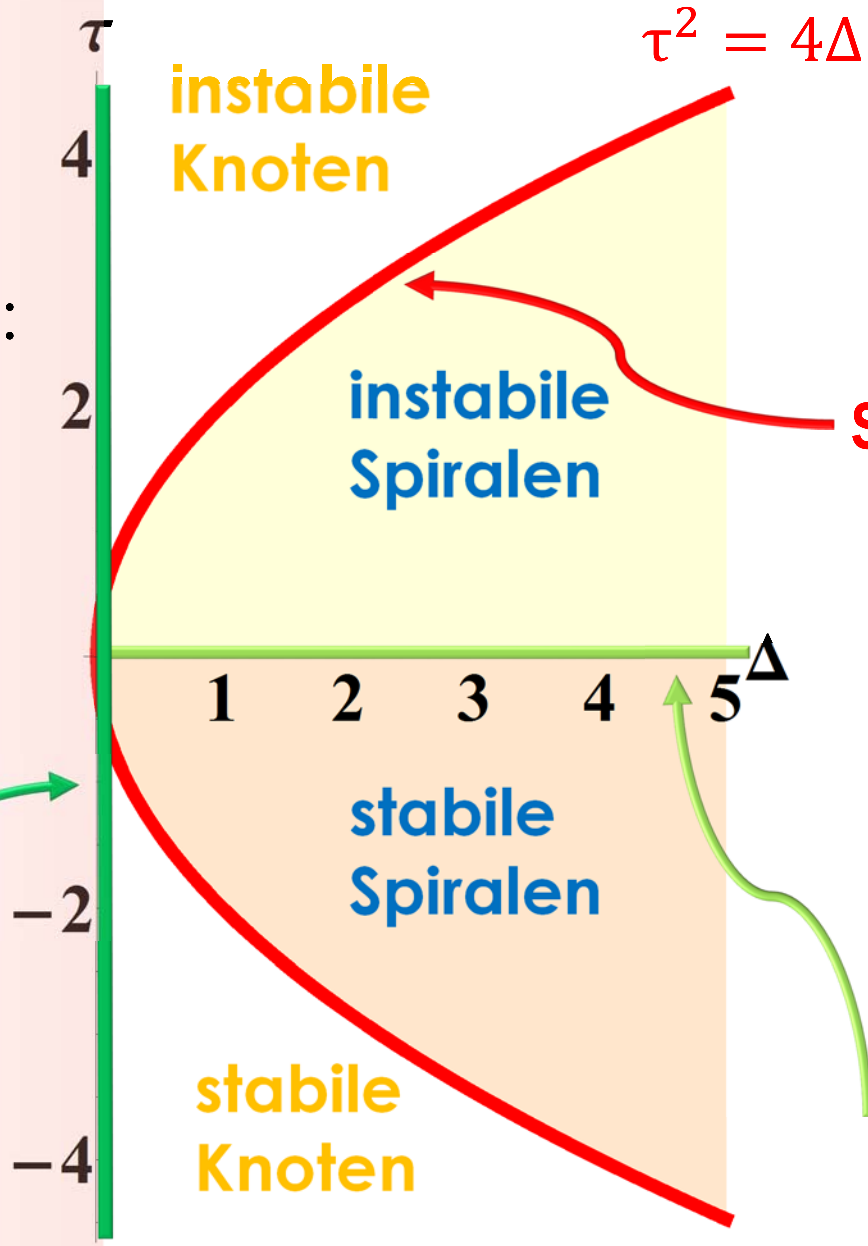


$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$\tau = Spur(a)$	$\tau < -2$	$\tau = -2$	$-2 < \tau < -1$	$\tau = -1$	$-1 < \tau$
$\Delta = Det(A)$	$1 < \Delta$	$\Delta = 1$	$0 < \Delta < 1$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

Δ und τ linearer Systeme

$\Delta < 0$ → Eigenwerte: real, versch. Vorzeichen
→ **Sattelpunkte**

nicht isolierte Fixpunkte



Sterne

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$\Delta > 0$ → Eigenwerte: entweder real, gleiche Vorzeichen
→ **Knoten**
oder komplex konj.
→ **Spiralen** und
geschl. Bahnen

LINEARISIERUNG

LINEARISIERUNG

$\dot{x} = f(x,y)$ mit Fixpunkt (x^*, y^*) dh. $\quad$ $\mathrm{f}(x^*, y^*) = 0$

$\dot{y} = g(x,y)$ $\quad$ $\mathrm{g}(x^*, y^*) = 0$

Substitution $u = x - x^*, v = y - y^*$

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v) \qquad \text{Taylor-Entwicklung}$$

$$= f(x^*,\ y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x}\bigg| + v\frac{\partial f}{\partial y}\bigg| + O(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{u} = u\frac{\partial f}{\partial x}\bigg| + v\frac{\partial f}{\partial y}\bigg| + O(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{v} = u\frac{\partial g}{\partial x}\bigg| + v\frac{\partial g}{\partial y}\bigg| + O(u^2, v^2, uv)$$

Jakobi-Matrix

$$\boxed{\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}\right|_{(x^*,\ y^*)} \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}}$$

BEISPIEL 5: LINEARISIERUNG

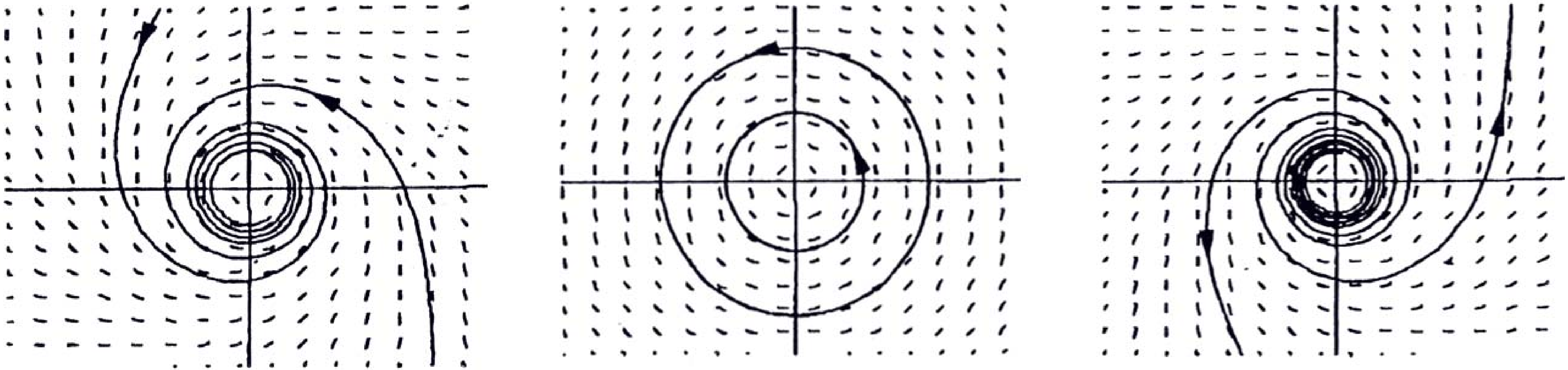
$\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2)$ mit Fixpunkt $(x^*, y^*) = (0,0)$
$\dot{y} = x + ay(x^2 + y^2)$

Jacobi-Matrix ausgewertet am Fixpunkt $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = 0$

um das nichtlineare Problem zu lösen: **Polarkoordinaten**

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{r} &= ar^3 \\ \dot{\Theta} &= 1 \end{aligned}$$

WIRKUNG: KLEINE **NICHT-LINEARE TERME**



$a < 0$ $\qquad$ $a = 0$ $\qquad$ $a > 0$

Spiralen und **Sterne** können verändert werden,
Fixpunkte verändern sich nicht

BEISPIEL 1: SCHAFE UND HASEN

schwerlösbares, nicht-lineares Gleichungssystem:

$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$
$\dot{y} = y(2 - x - y)$

Fixpunkte finden: $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$

➡ $(0,0); (0,2); (3,0); (1,1)$

Linearisierung, lokal lineares System betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

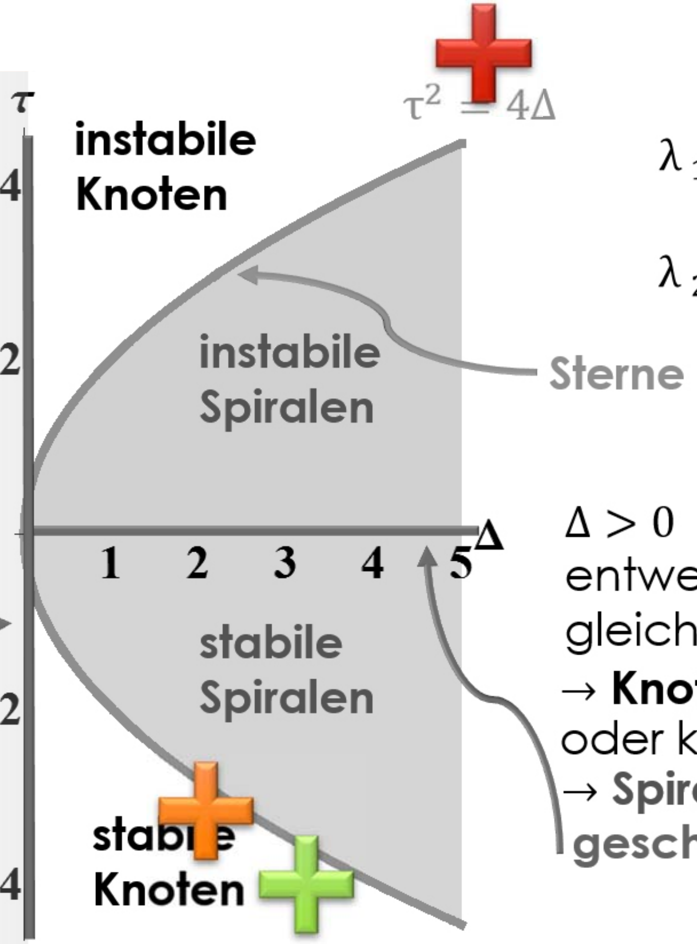
$$= \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2y \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

Jakobi-Matrix an Fixpunkten auswerten

FIXPUNKT-ANALYSE

Δ und τ linearer Systeme

$\Delta < 0$ → Eigenwerte: real, versch. Vorzeichen
→ **Sattelpunkte**



$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

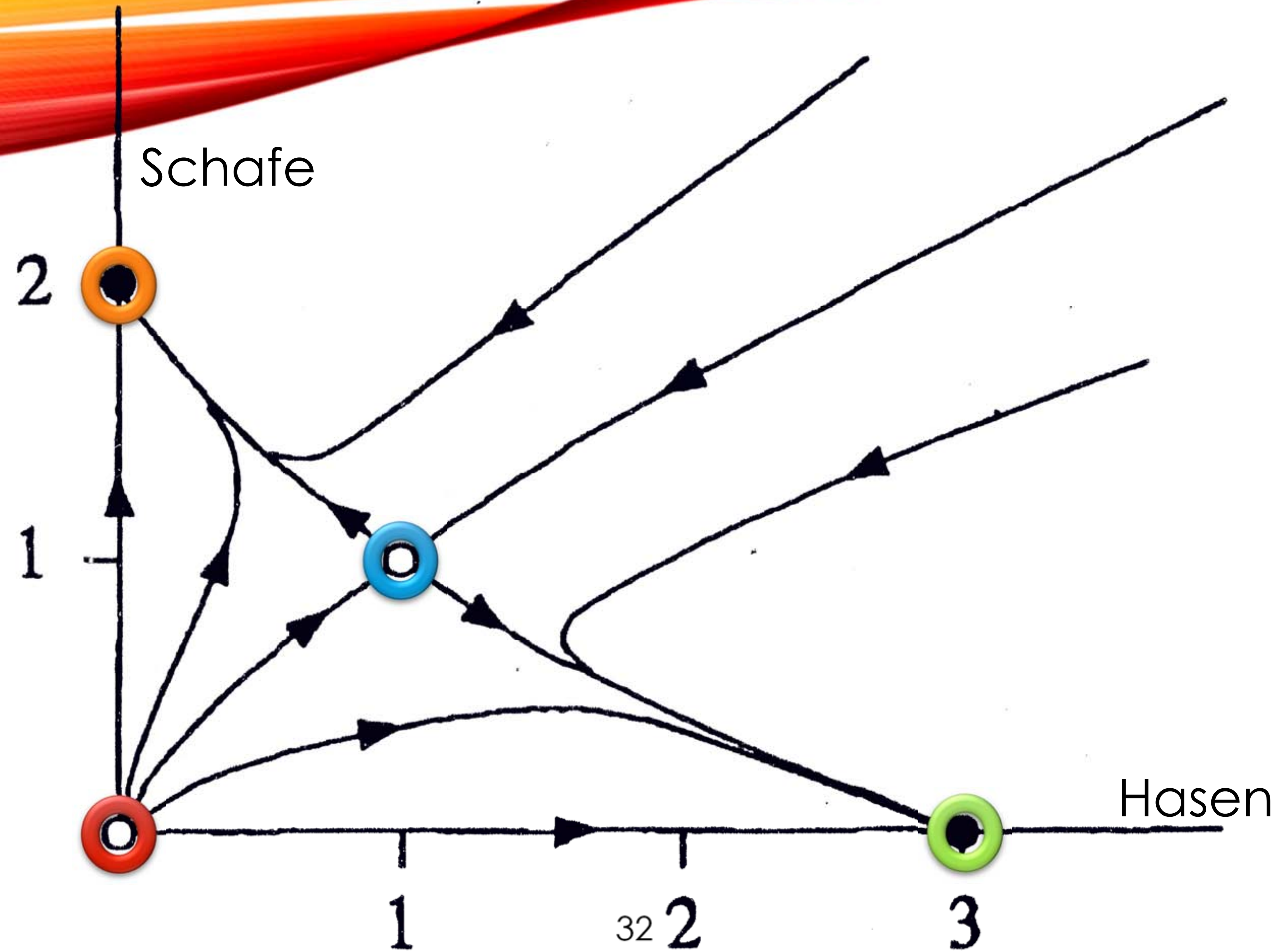
$\Delta > 0$ → Eigenwerte: entweder real, gleiche Vorzeichen
→ **Knoten**
oder komplex konj.
→ **Spiralen** und **geschl. Bahnen**

$(0,0)$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
→instabiler Knoten

$(0,2)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
→stabiler Knoten

$(3,0)$: $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
→stabiler Knoten

$(1,1)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
→Sattelpunkt


Schafe
2
1
Hasen
1
2
3

SCHLUSSFOLGERUNGEN

- Lineare Systeme **einfach** zu lösen
- **Linearisierung**, Vorsicht mit Spiralen!
- Bei nicht-linearen Systemen **Jacobi-Matrix** an Fixpunkten auswerten
- Spur/Determinante linearer oder linearisierter System zur **Fixpunkt-Analyse** nutzen
- **Phasenebene** hilft die Bewegung zu veranschaulichen

DANKE FÜR DIE AUFMERKSAMKEIT ☺

QUELLEN

- Nonlinear Dynamics and Chaos, Ch. 5 – 6, Steven H. Strogatz (1994)
- Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields, J. Guckenheimer and P. Holmes (2002)