Grenzzyklen

Motivation

- Grenzzyklen modellieren von selbst oszillierende Systeme
- Stabile Grenzzyklen →kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen gehen in Grenzzyklus über
- Beispiele:

→Van-der-Pol Schwingkreis

→Glykol-Zyklus

Definition

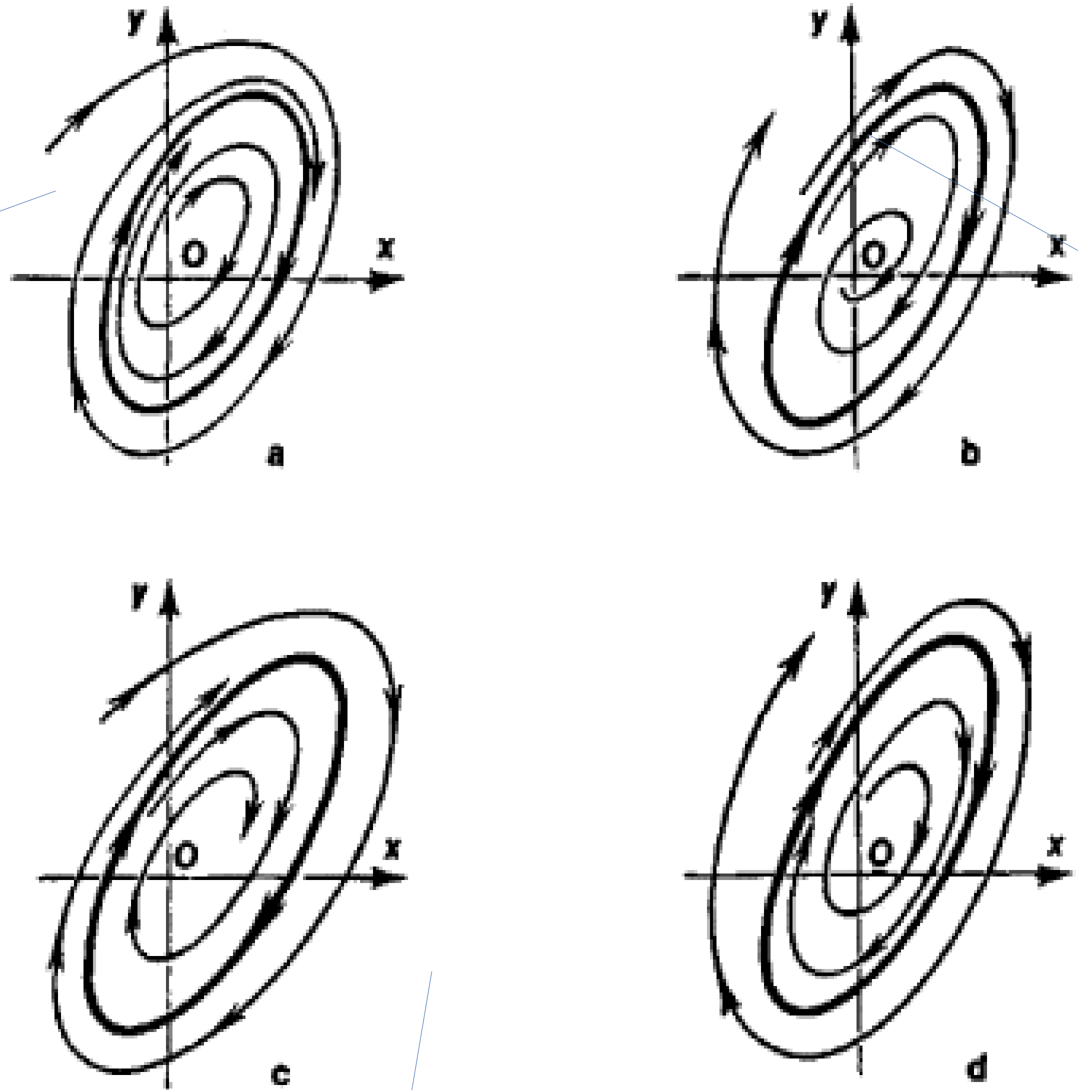
- Grenzzykel = Isolierte, periodische Lsg (Trajektorie) eines autonomen DGL Systems

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$$

- Im Phasenraum: geschlossene, isolierte Bahnkurve

  $\rightarrow$ Nachbarkurven mit anderen Anfangsbedingungen sind nicht geschlossen,   laufen im Limes $t \rightarrow \infty$ auf Bahnkurve zu/weg

- Stabil/Attraktor: Nachbarkurven laufen darauf zu
- Instabil/Repeller Nachbarkurven laufen weg



stabil

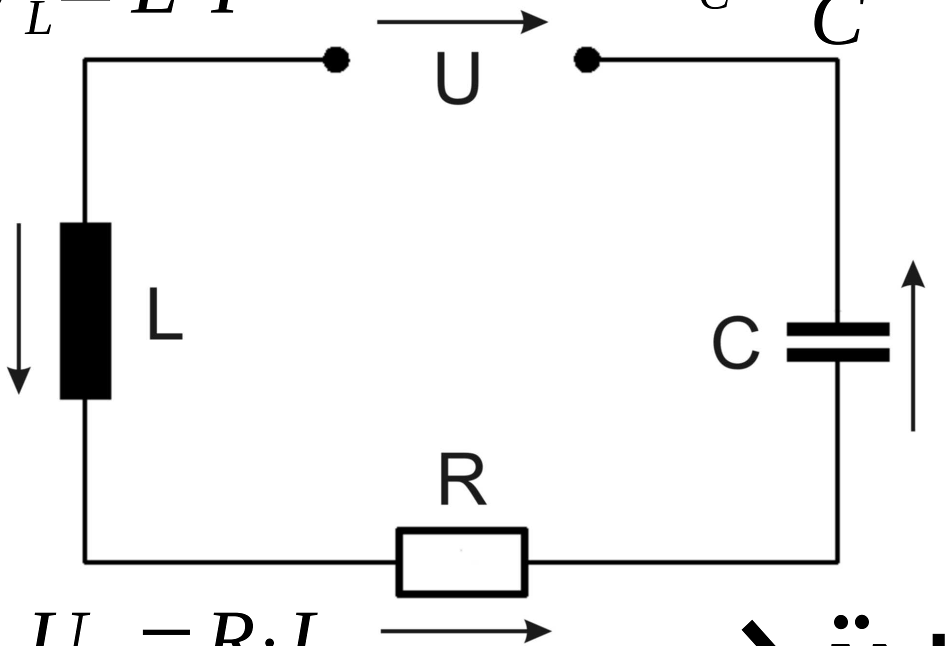
instabil

Semi-stabil

RLC Schwingkreis

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$



$$U_R = R \cdot I$$

$$0 = U_R + U_L + U_C$$

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

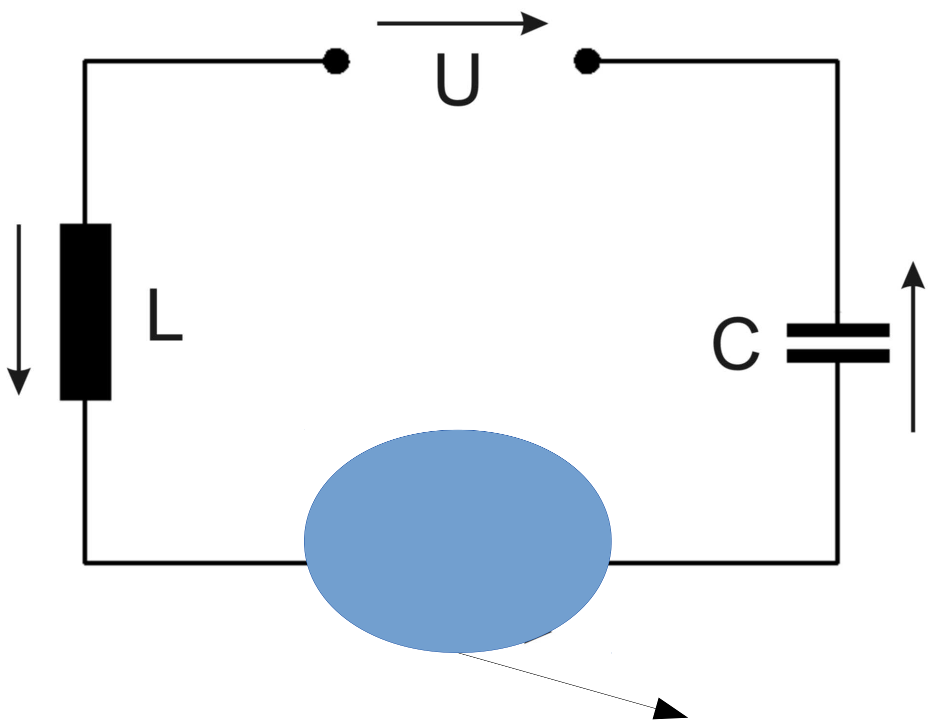
$$\rightarrow \ddot{x} + 2 \cdot \kappa \cdot \dot{x} + x = 0$$

→ homogene, lineare DGL 2. Ordnung

→ leicht lösbar mit Exponentialansatz

Van der Pol Schwingkreis

- Kein linearer Widerstand mehr
- Spannung am Widerstand folgt nicht mehr ohmschem Gesetz



$$DGL \rightarrow L \cdot \ddot{I} + \underbrace{\dot{f}(I)}_{\frac{\partial f}{\partial I}\dot{I}} + \frac{I}{C} = 0$$

$$U_R = f(I), f(I) = nonlinear, f(I) \neq R \cdot I, f(I) \approx aI + bI^3 + \ldots$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial I} \approx a + 2bI^2$$

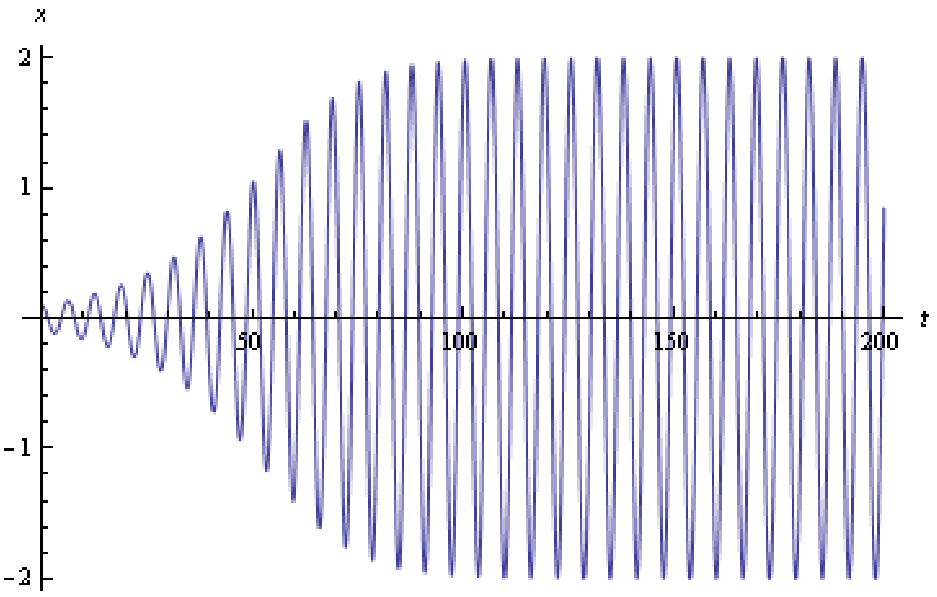
Van-der-Pol Oszillator

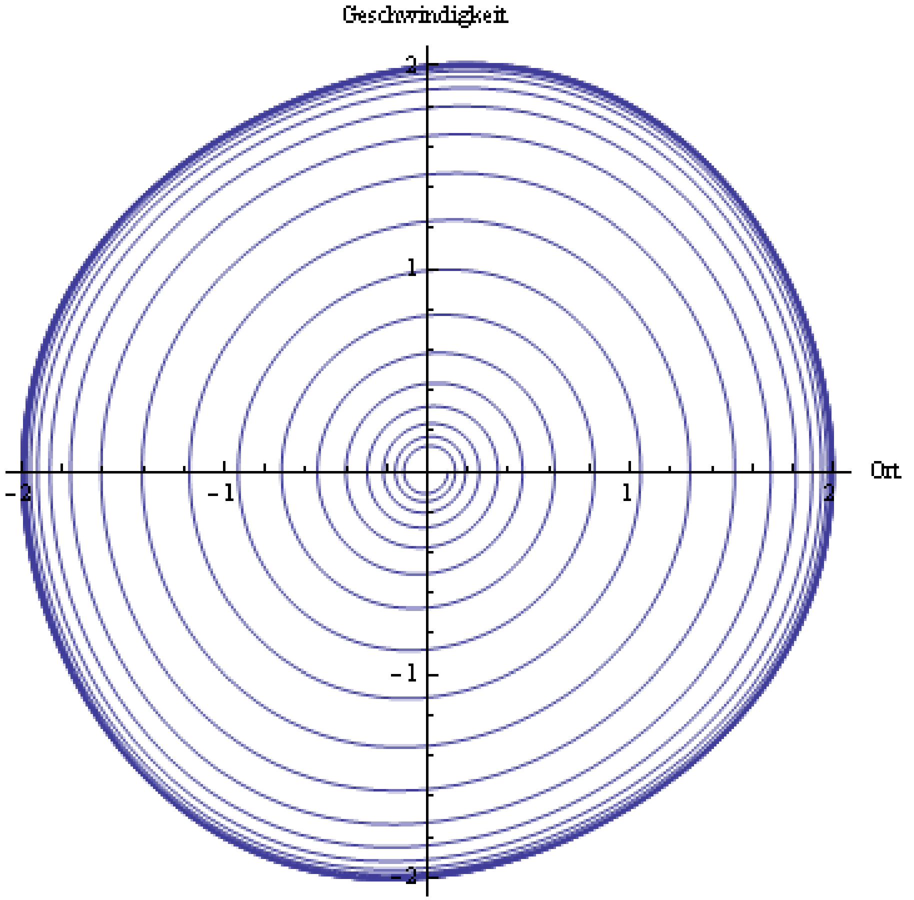
- LC-Schwingkreis mit nichtlinearem Dämpfungsterm
- Van der Pol Gleichung:

$$\ddot{I}(t)+\mu\left(I(t)^2-1\right)\dot{I}(t)+I(t)=0,\ \mu\geq 0$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{\mu}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})^2-\mathbf{1}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\mu}\geq\mathbf{0}$$

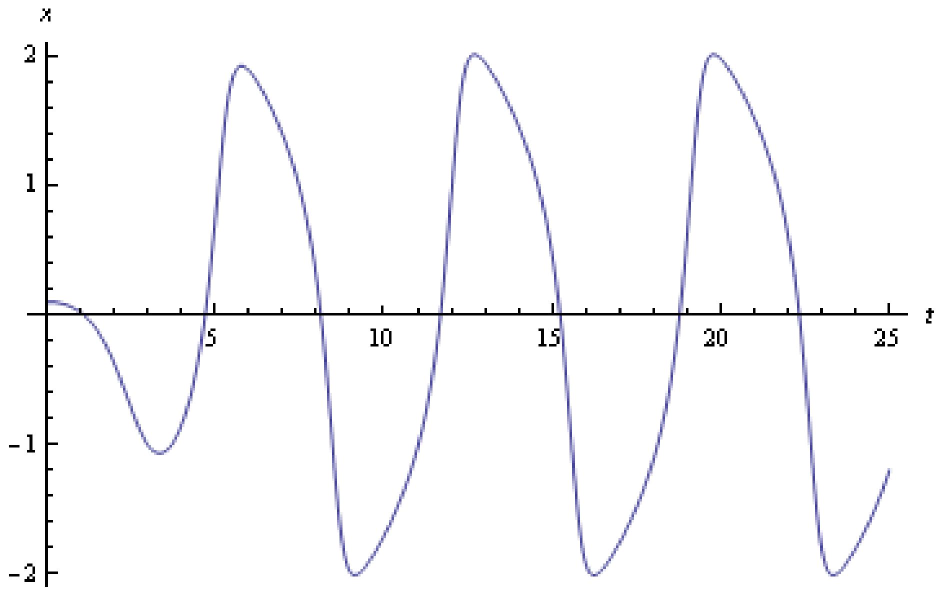
- $|x|>1 \rightarrow x^2-1>0 \rightarrow$ normale, positive Dämpfung
- $|x|<1 \rightarrow x^2-1<0 \rightarrow$ negative Dämpfung
- Große Amplituden gedämpft, kleine Amplituden gepumpt → selbsterhaltende Schwingung
- Periodische Bewegung → geschlossene Bahnkurven im Phasenraum

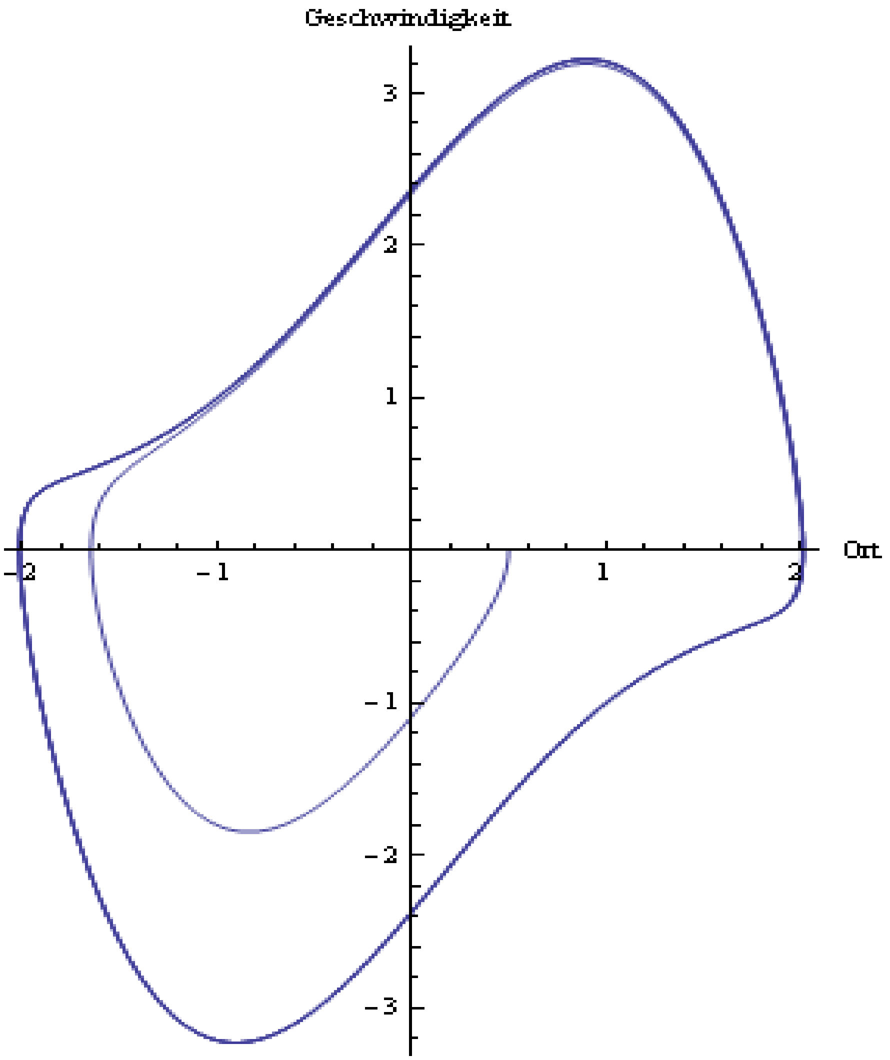
μ=0.1



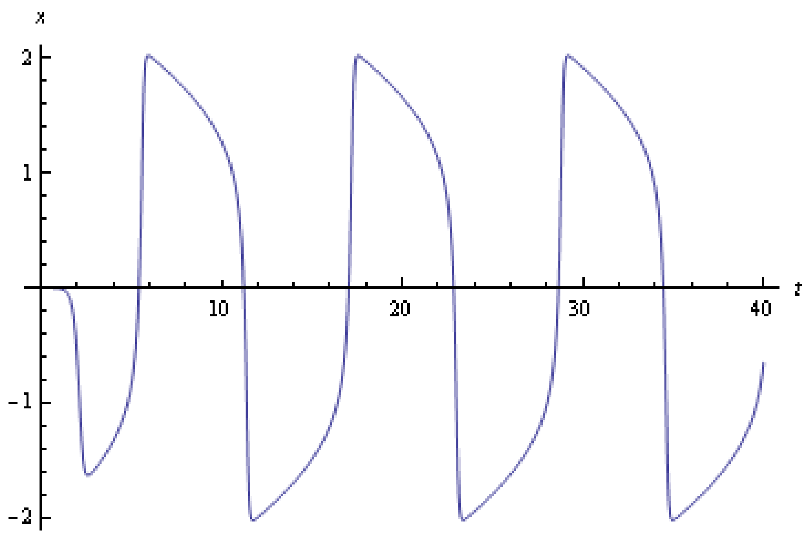


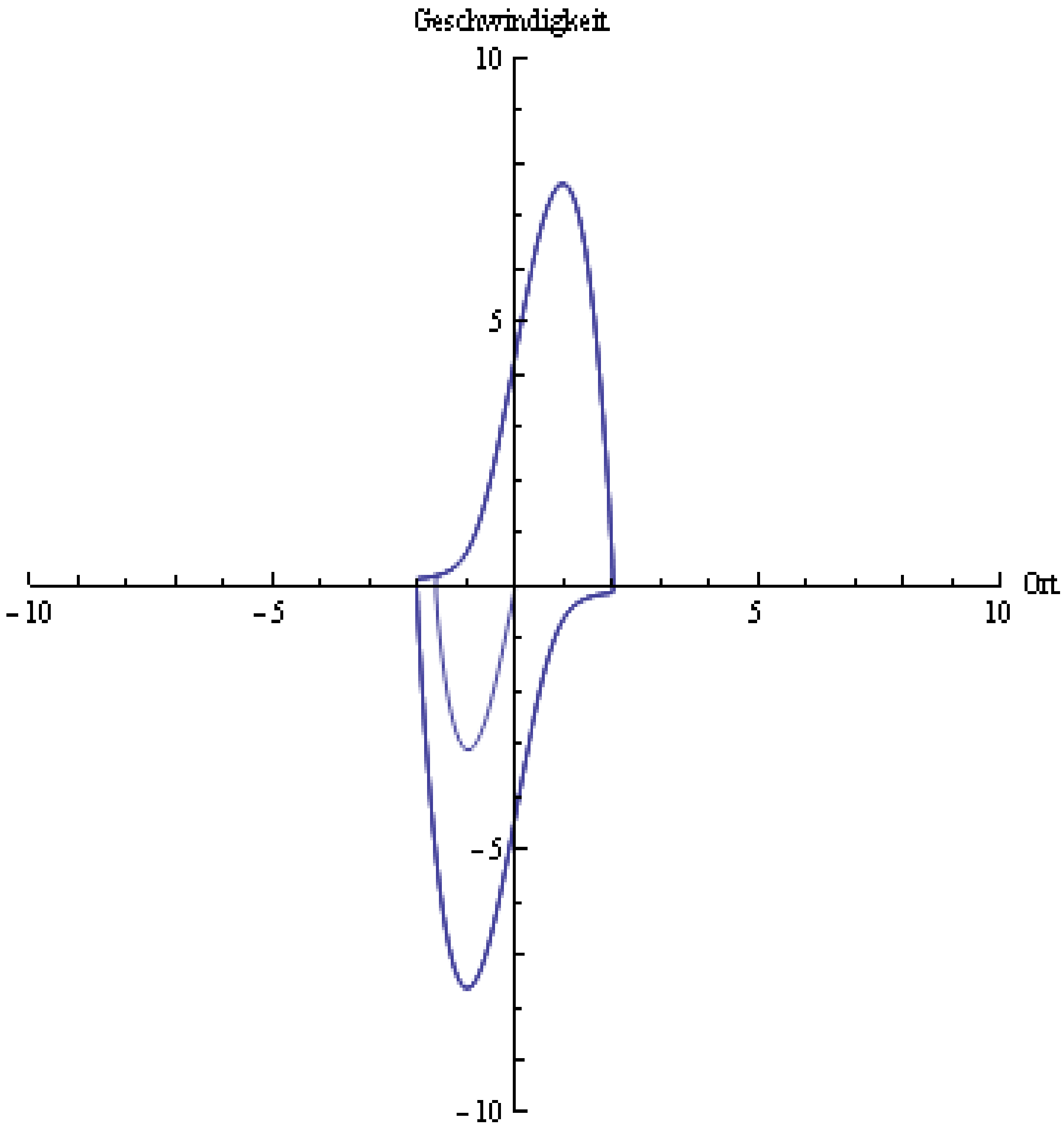
μ=1.5



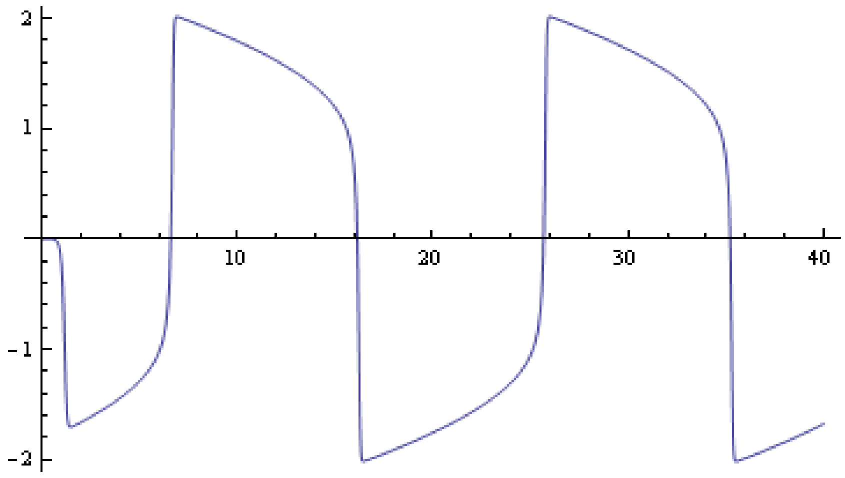


$\mu=5$

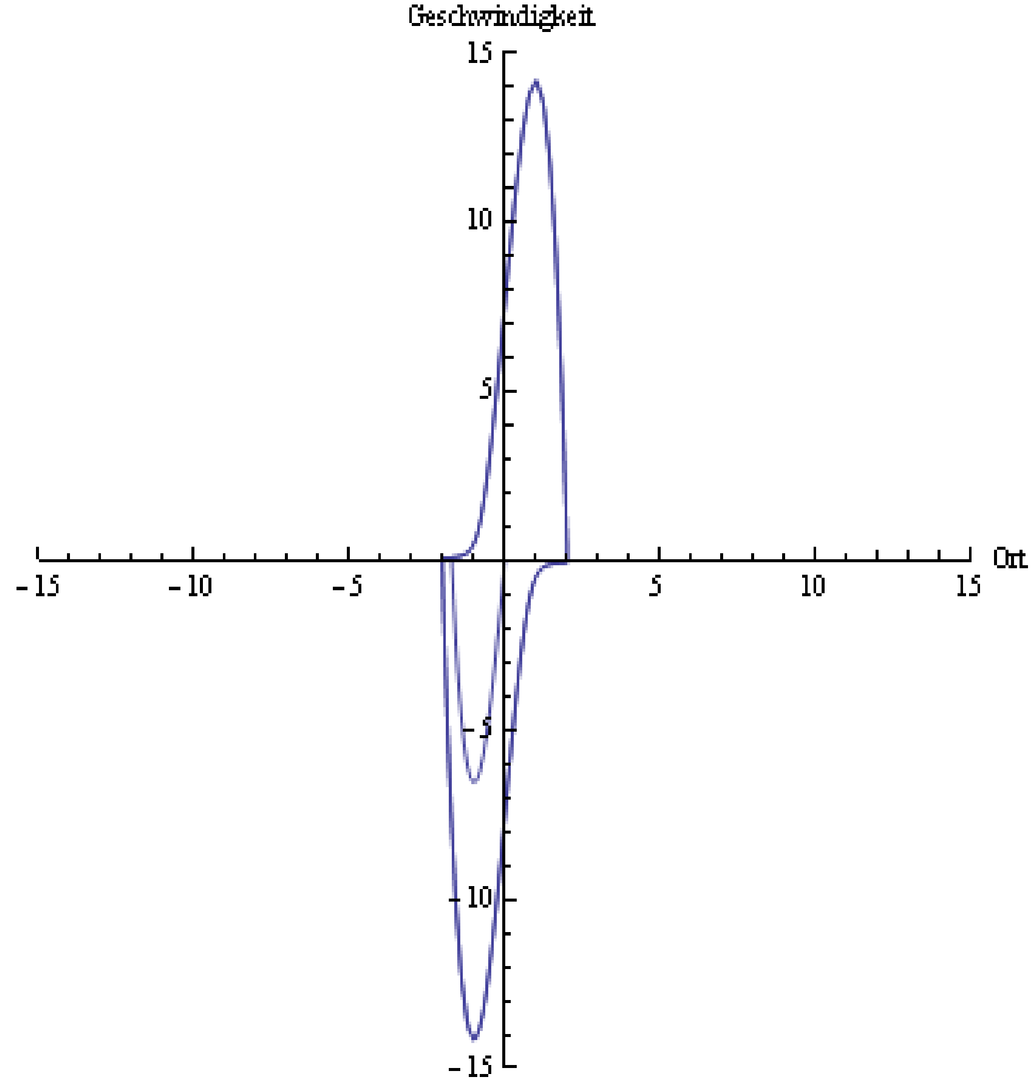




μ=10



2
1
-1
-2
10
20
30
40



Geschwindigkeit
15
10
5
-5
-10
-15
Ort
-15
-10
-5
5
10
15

Grenzzykel beim Schwingkreis

- Grenzzykel sind nichtlineares Phänomen
- bei linearen Systemen gibt es keine isolierten Trajektorien → mit Vorfaktor ebenfalls geschl. Bahnkurve
- Grenzzykel weder beim linear gedämpften noch beim ungedämpften Schwingkreis/H.O.

Kann man zeigen, dass der Van der Pol Oszillator einen stabilen Grenzzyklus besitzt?

→ in 2D mit dem Liénard Theorem möglich!

Liénard Gleichung

- schwingende Systeme durch Lienard Gleichung beschreiben

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$$

- Verallgemeinerung der Van der Pol Gleichung
- Mechanische Interpretation: Bewegungsgleichung einer Einheitsmasse mit nichtlinearer (vom Ort abh.) Dämpfung -f(x)x'(t) und nichtlinearer (vom Ort abh.) Rückstellkraft

→Feder im nicht homogenen viskosen Medium

→ Rückstellkraft abh. von Dehnung der Feder

Liénard System

- Lienard Gleichung ist äquivalent zu folgendem System:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -g(x) - f(x)\,y$$

Liénard Theorem

Das Lienard System hat <u>genau einen stabilen</u> Grenzzyklus falls

1. f(x) und g(x) überall stetig dfb sind

2. g(x) eine ungerade Funktion ist → g(-x)=-g(x)

3. f(x) eine gerade Funktion ist → f(-x)=f(x)

4. g(x)>0 für x>0

5. Die ungerade Funktion

$$F(x)=\int_0^x f(u)du$$

hat

→ genau eine positive Nullstelle bei x=a,

→ ist negativ für 0<x<a,

→ positiv und nicht fallend für x>a,

→ F(x) → ∞ für x → ∞

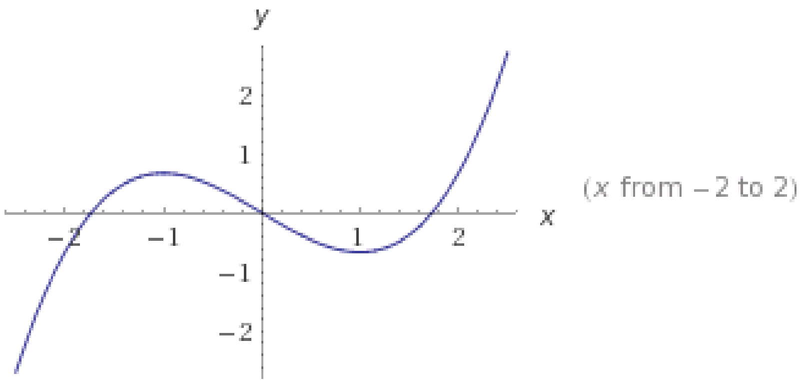
- Plausible Kriterien, da gilt

  2.+4. → rückstellende Kraft verhindert zu große Auslenkung aus Ruhelage

  3.+5. → Dämpfung hängt nur von $|x|$ ab

Beispiel: Van der Pol Oszillator

- Z.z.: Van der Pol Oszillator hat genau einen stabilen Grenzzyklus
- $x''(t) + \mu(x^2(t)-1)x'(t) + x(t)=0$
- $\downarrow$ $\downarrow$
- $x''(t) + f(x)x'(t) + g(x)=0$
- 1.-4. trivialerweise erfüllt
- 5.:



$$F(x)=\int_0^x \mu(u^2-1)\,du=\frac{1}{3}\cdot\mu\cdot x\cdot(x^2-3)$$

- → Nullstellen bei $x=0, x=\pm\sqrt{3}$ → einzig nichtnegative Nullstelle bei $x=+\sqrt{3}$

→ **Der Van der Pol Oszillator besitzt genau einen stabilen Grenzzyklus**

→*Wie sieht bei Grenzzyklus Periode/Form aus?*

- Meist nicht analytisch für alle Parameter lösbar
- Näherung für große/kleine Parameter
- Am Beispiel des Van der Pol Oszillators im stark nichtlinearen/schwach nichtlinearen Limes

Relaxationsoszillationen

→ Van der Pol im stark nichtlinearen Limes

- μ>>1 → nichtlinearer Term wird groß
- (x,y) als neue Phasenraumvariablen einführen

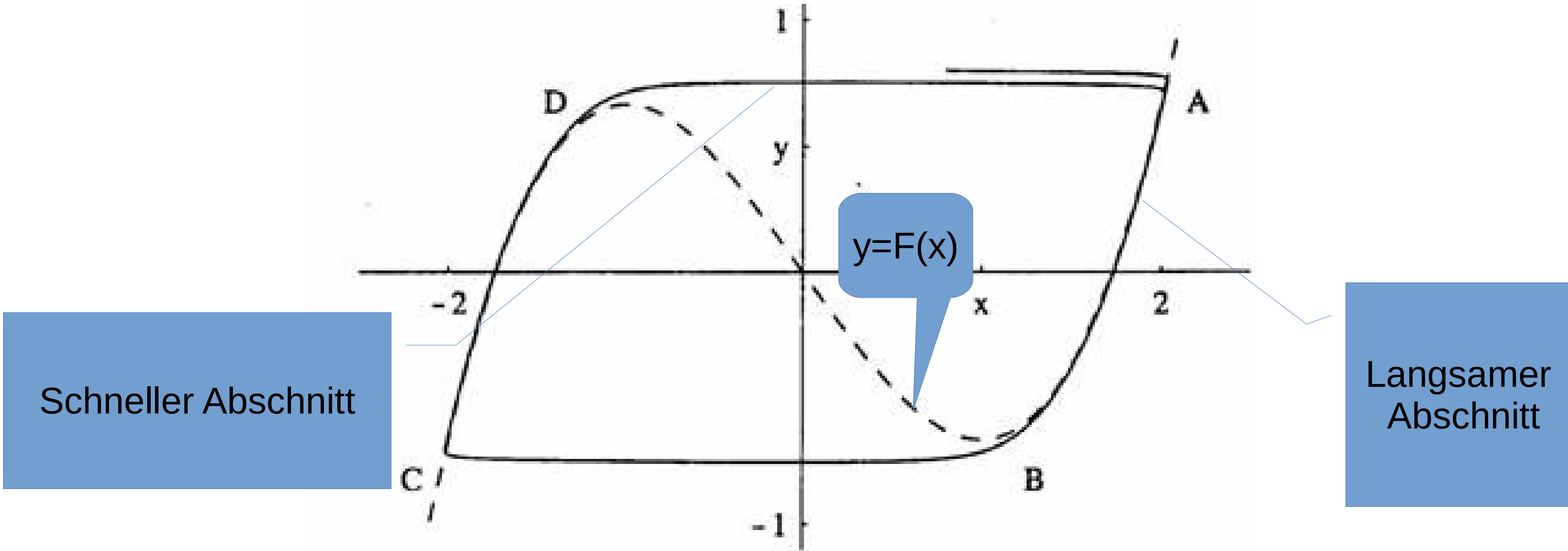
→ Typisches Aussehen der Trajektorie im Phasenraum

→ Periodendauer bestimmen

$$\dot{x} = \mu \left(y - F\left(x \right) \right), \dot{y} = \frac{-x}{\mu}$$

$$F\left(x \right) = \frac{1}{3} x^3 - x$$

Trajektorie im (x,y)-Phasenraum für



Intervall [D,A]

$$y - F(x) \sim O(1) \rightarrow |\dot{x}| \sim O(\mu) \gg 1, |\dot{y}| \sim O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$y - F(x) \sim O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \rightarrow |\dot{x}| \sim |\dot{y}|$$

Intervall [A,B]

$$|\dot{x}| \approx 0, |\dot{y}| \sim O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

Periodendauer berechnen

- Schnelle Abschnitte vernachlässigbar

$$T \approx 2 \int_{t_A}^{t_B} dt$$

$$\rightarrow T \approx 2 \int_2^1 \frac{-\mu\left(x^2-1\right)}{x} dx \approx \mu\left(3-2\ln 2\right)$$

$$\rightarrow dt \approx \frac{-\mu\left(x^2-1\right)}{x} dx$$

Schwach nichtlineare Oszillatoren

→Van der Pol im schwach nichtlinearen Limes

- allgemein: Gleichungen der Form

$$\ddot{x}(t)+x(t)+\varepsilon\cdot h(x,\dot{x})=0$$

- h ist beliebige, glatte Funktion
- $0\leq\varepsilon<<1$
- Stellen Störung des harmonischen Oszillators dar

$$\ddot{x}(t)+x(t)=0$$

- 2 bekannte Beispiele: Van der Pol Oszillator im schwach nichtlinearen Limes, Duffing Gleichung

Van der Pol im schwach nichtlinearen Limes

$$\rightarrow \ddot{x} + x + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} = 0$$

$$h(\dot{x}, x) = \left(x^2 - 1\right)\dot{x}$$

→**Periodendauer und Aussehen der Trajektorie im Phasenraum**

Lösungsansatz: normale Störungstheorie

- Annahme: $\varepsilon \ll 1$ → bei der Lösung alle Terme mit $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigen
- Taylorentwicklung der Lösung

$$\rightarrow x(t,\varepsilon) \approx x^0(t) + x^1(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

- Störungstheoretischen Ansatz in die DGL einsetzen
- Nach Ordnung von ε gruppieren → höhere Ordnungen von ε weglassen → einfaches Gleichungssystem
- Anfangsbedingungen für $x(t,\varepsilon)$ in $x(t,\varepsilon) \approx x^0(t) + x^1(t)\varepsilon$ einsetzen → Anfangsbedingungen für $x^0(t)$ und $x^1(t)$
- Gleichungssystem lösen für $x^0(t)$ und $x^1(t)$ lösen
- Beide Lsg einsetzen in

$$x(t,\varepsilon) \approx x^0(t) + x^1(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Versagen der Lösungsstrategie

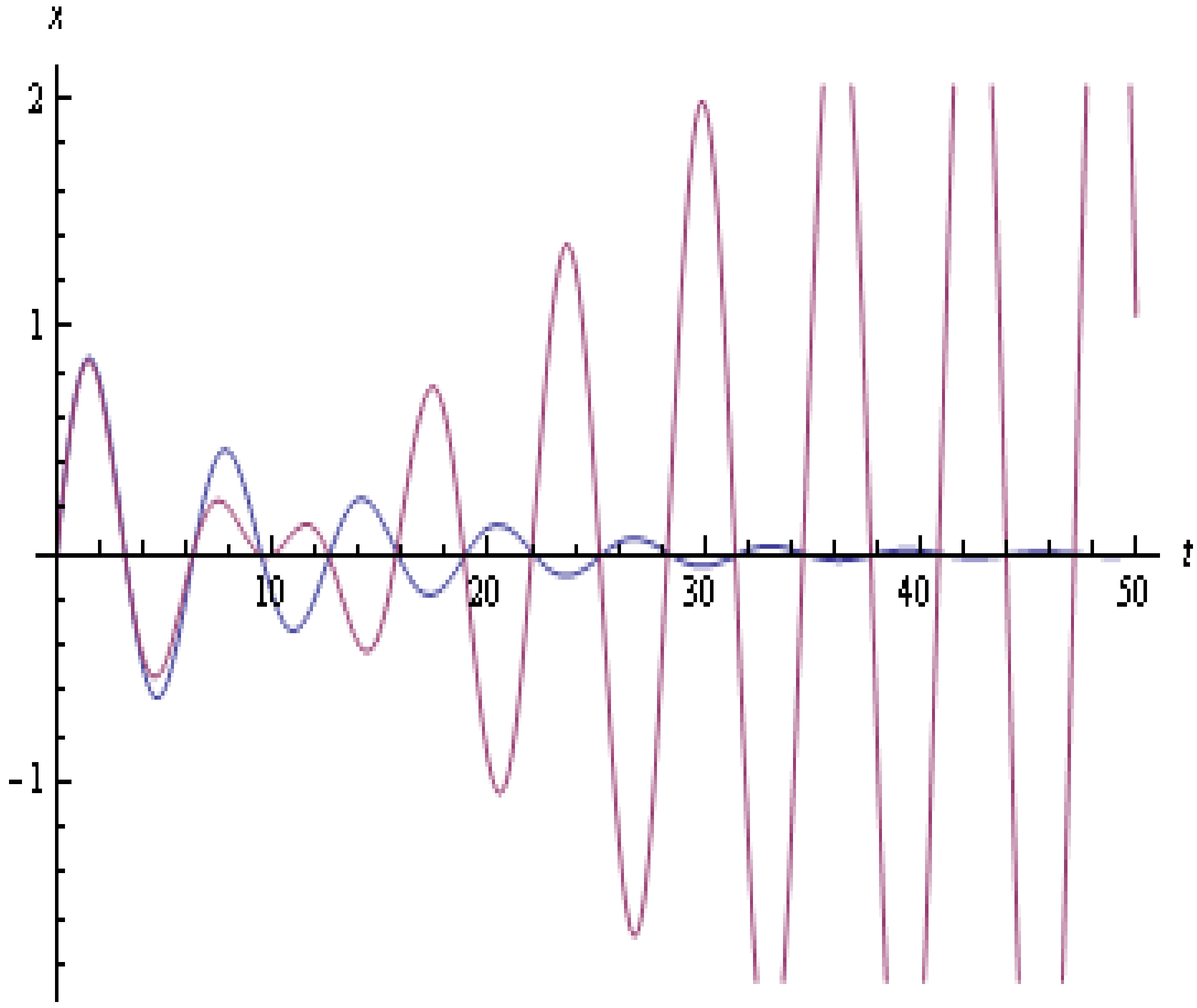
- Annahme bei Taylorentwicklung: festgehaltenes t und sich entwickelndes ε

  →funktioniert nur für kleine t

  →sobald $t \to \infty$ weicht Lösung stark ab
- Bsp.: HO mit (schwacher), linearer Dämpfung (exakte Lösung bekannt)

  →genäherte Lösung ist Anfang einer konvergenten Reihe für exakte Lösung

  →Reihe wird abgebrochen bevor exponentieller Abfall berücksichtigt wird


x
2
1
-1
10
20
30
40
50
t

- 2 Zeitskalen an der exakten Lösung

$$x(t,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\varepsilon t}}\underline{\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}$$

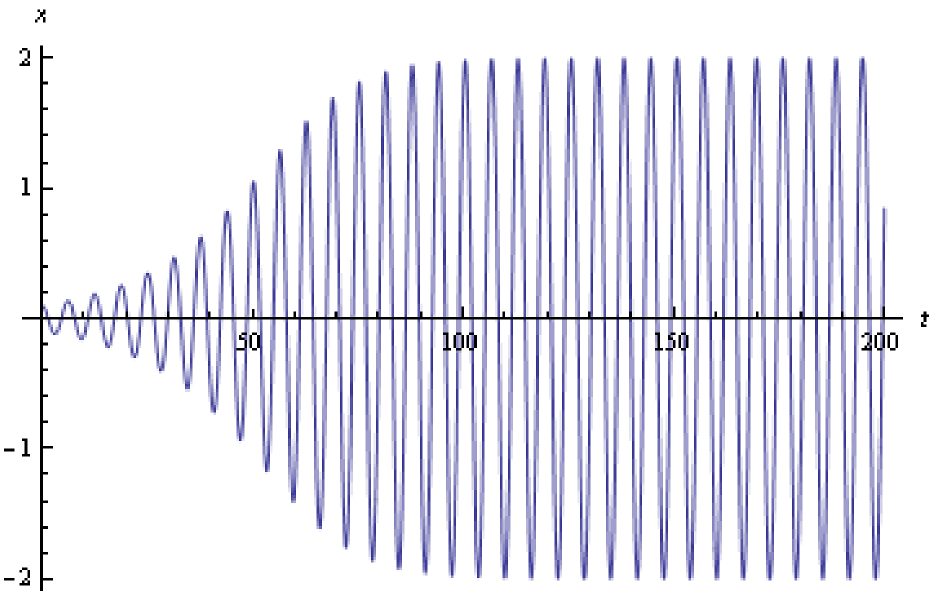
→ schnelle Zeitskala, t~O(1), Sinusoszillationen

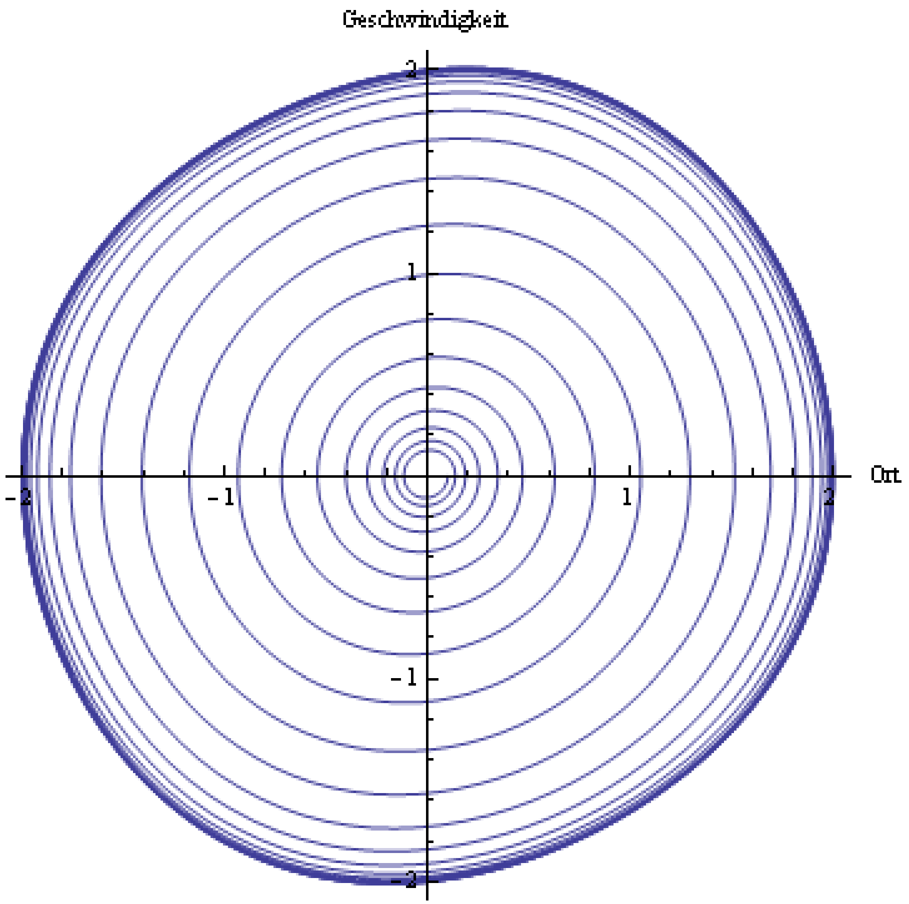
→ langsame Zeitskala, t~1/ε, exponentieller Abfall

- Grund für Abweichen der genäherten Lösung für t → ∞

→ **mind. 2 Zeitskalen nötig um Lösung zu nähern**

μ=0.1





Two-Timing

- Statt Variable t für Zeit 2 Variablen
- τ für schnelle Zeitskala, dh für $t \sim O(1)$, $\tau = t$
- T für langsame Zeitskala, dh für $t \sim O(1/\varepsilon)$, $T = \varepsilon t$
- Wieder Lösung mit Reihenansatz nähern, diesmal aber mit

$$x(t,\varepsilon) = x(\tau, T) \approx x^0(\tau, T) + x^1(\tau, T)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

- Reihenansatz wieder in DGL einsetzen und nach Ordnung von ε gruppieren (Ableitungen mit Kettenregel nach T,τ)
- 2 verschiedene DGL → Lösung → fertig