Grenzzyklen II

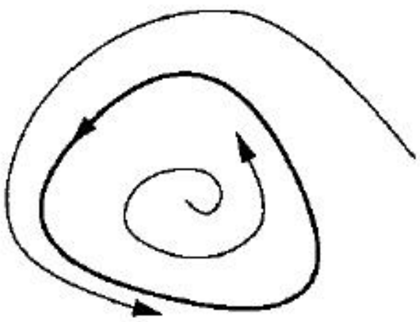
Proseminar Theoretische Physik

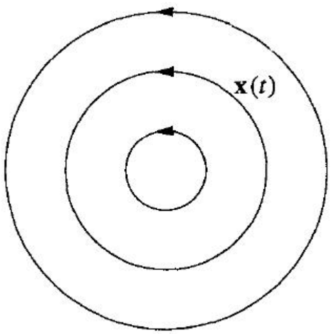
Ramona Wolf

28.05.2014

Motivation

Grenzzyklen: Isolierte geschlossene Bahnkurven





Liénard System: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ bestimmte Bedingungen erfüllen, gibt es in dem System einen stabilen Grenzzykel um dem Ursprung.

Es gibt noch ein weiteres Theorem, um die Existenz geschlossener Bahnen zu zeigen.

Übersicht

1. Teil:

i. Index-Theorie

2. Teil:

i. Poincaré-Bendixson-Theorem

ii. Beispiel: Glykolyse

3. Teil:

i. Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

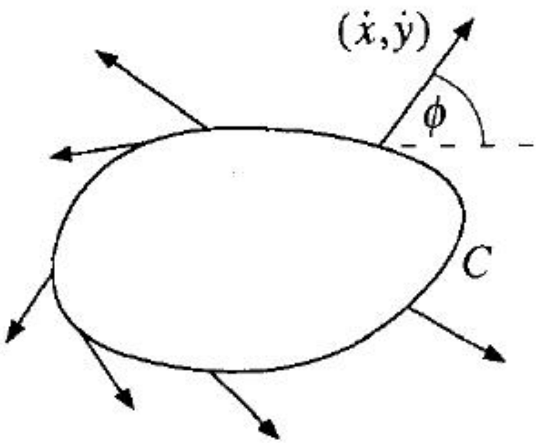
Index-Theorie

Index-Theorie

Index: Zahl, die die Windung einer Kurve angibt

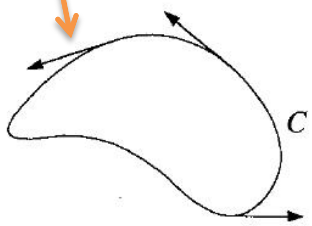
Sei $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\dot{x}, \dot{y})$ ein glattes Vektorfeld.

C sei eine geschlossene Kurve (nicht unbedingt eine Trajektorie!)



Bedingungen:

- C kreuzt sich nicht selbst
- C durchläuft keine Fixpunkte



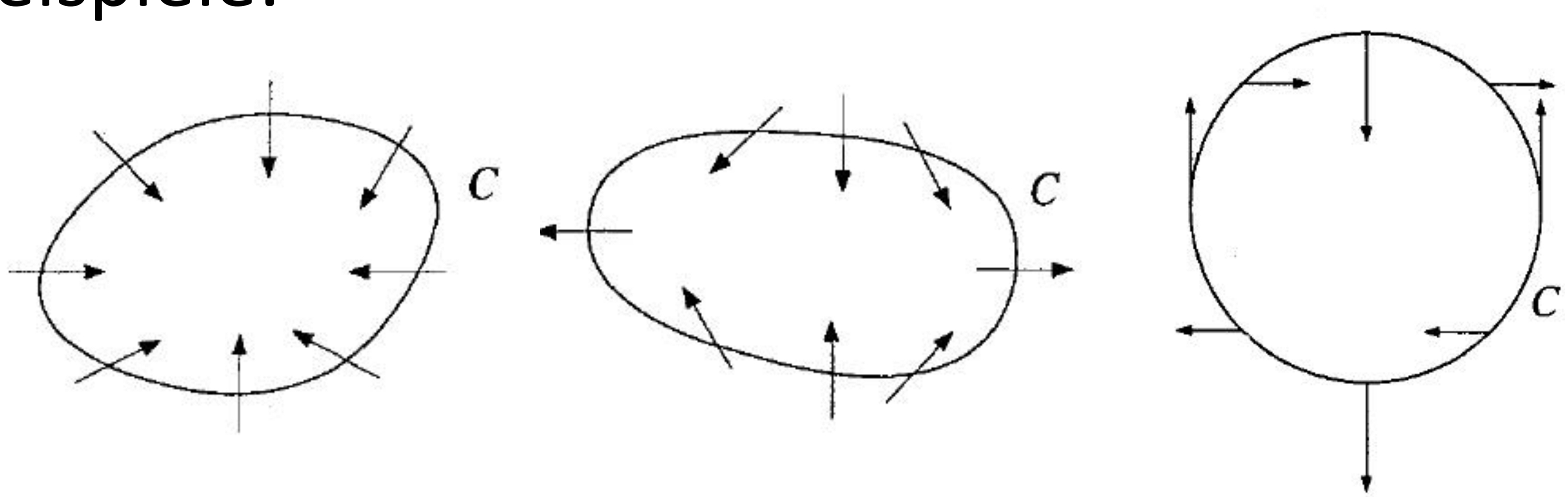
$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$[\phi]_C :=$ Änderung von $\phi \Rightarrow$ ganzzahliges Vielfaches von 2π

Index: $\boxed{I_C = \frac{1}{2\pi}[\phi]_C}$

Index-Theorie

Beispiele:



$$[\phi]_C = 2\pi$$
$$I_C = \frac{1}{2\pi}[\phi]_C = 1$$

$$[\phi]_C = -2\pi$$
$$I_C = -1$$

$$[\phi]_C = 0$$
$$I_C = 0$$

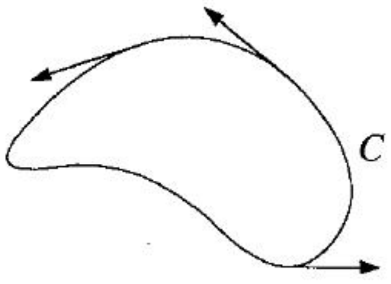
Index-Theorie

Eigenschaften:

i. Angenommen, C kann kontinuierlich in eine Kurve C‘ überführt werden, ohne einen Fixpunkt zu passieren. Dann gilt: $I_C = I_{C'}$

ii. Wenn C keine Fixpunkte umschließt, gilt $I_C = 0$.

iii. Wenn C eine Trajektorie ist, gilt $I_C = +1$.



⇒ **eine Trajektorie muss also immer einen Fixpunkt umschließen.**

Poincaré-Bendixson-Theorem

Poincaré-Bendixson-Theorem

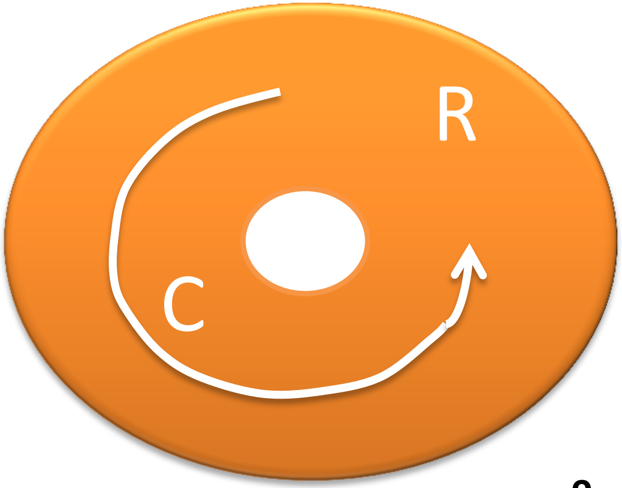
Voraussetzungen:

i. R ist eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge einer Ebene.

ii. $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge, die R enthält.

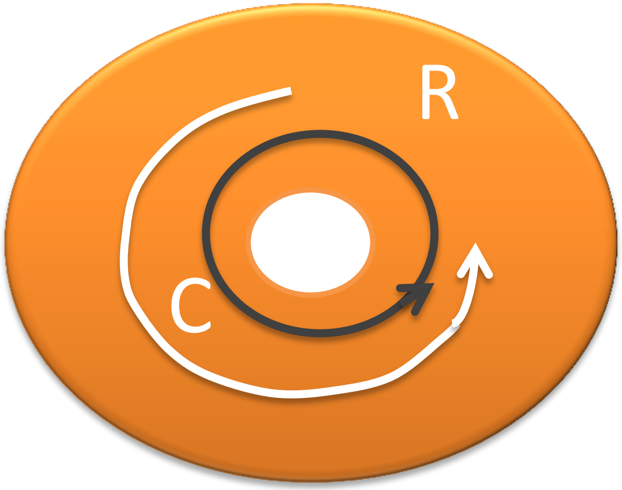
iii. R enthält keine Fixpunkte.

iv. Es existiert eine Trajektorie C, die in R eingeschlossen ist, d.h. sie beginnt in R und bleibt für alle Zeiten dort.



Poincaré-Bendixson-Theorem

Dann gilt:



- C ist eine geschlossene Bahnkurve

oder

- C konvergiert für $t \to \infty$ spiralförmig gegen eine geschlossene Bahnkurve.

In beiden Fällen enthält R eine **geschlossene Bahnkurve**!

Poincaré-Bendixson-Theorem

Trapping Region

Problem: Trajektorie C ist schwer zu finden.

Lösung: Konstruktion einer Trapping Region

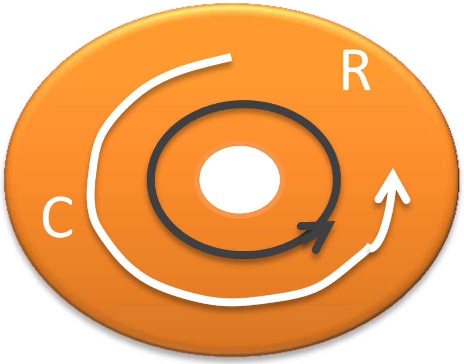
- Alle Vektoren am Rand müssen in die Trapping Region zeigen

  → keine Bahnkurve kann aus der Region entkommen

- Die Region muss um einen Fixpunkt liegen (aus der Index Theorie)

Poincaré-Bendixson-Theorem

Zusammenfassung



Wichtige Bedingungen:

- keine Fixpunkte in R
- Trajektorie, die ganz in R liegt

⇒ Dann gibt es eine geschlossene Bahnkurve in R

→ **Konstruktion einer Trapping Region**

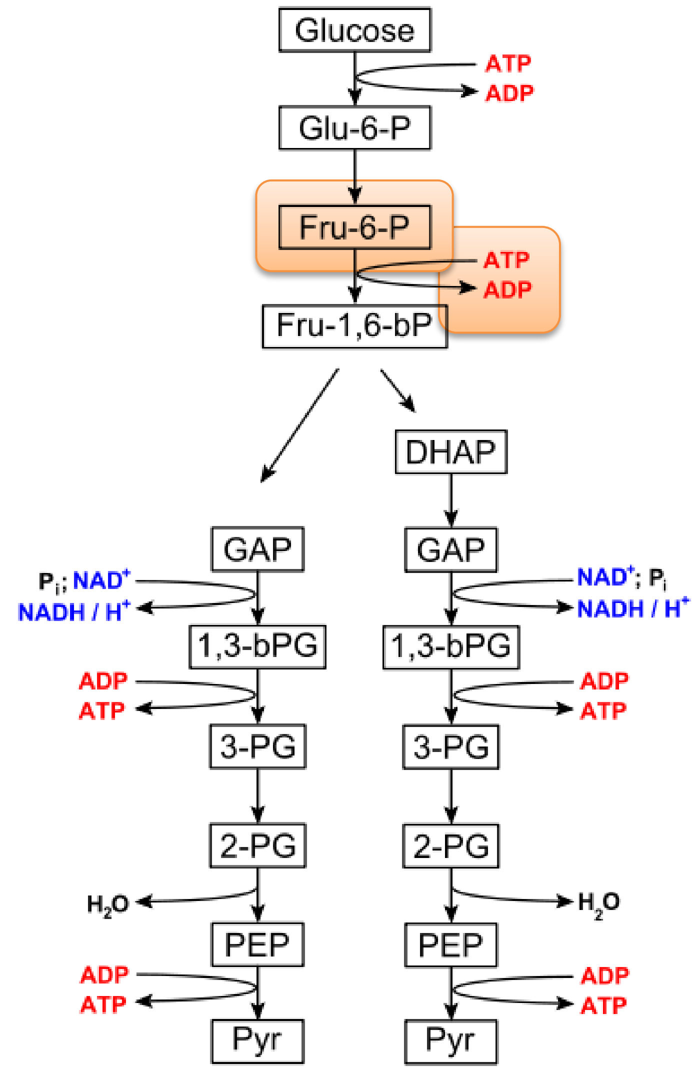
Beispiel: Glykolyse

$$\dot{x} = -x + ax + x^2 y$$
$$\dot{y} = b - ay - x^2 y$$

$x :=$ ADP-Konzentration

$y :=$ Fru-6-P-Konzentration

$a, b > 0$



Beispiel: Glykolyse

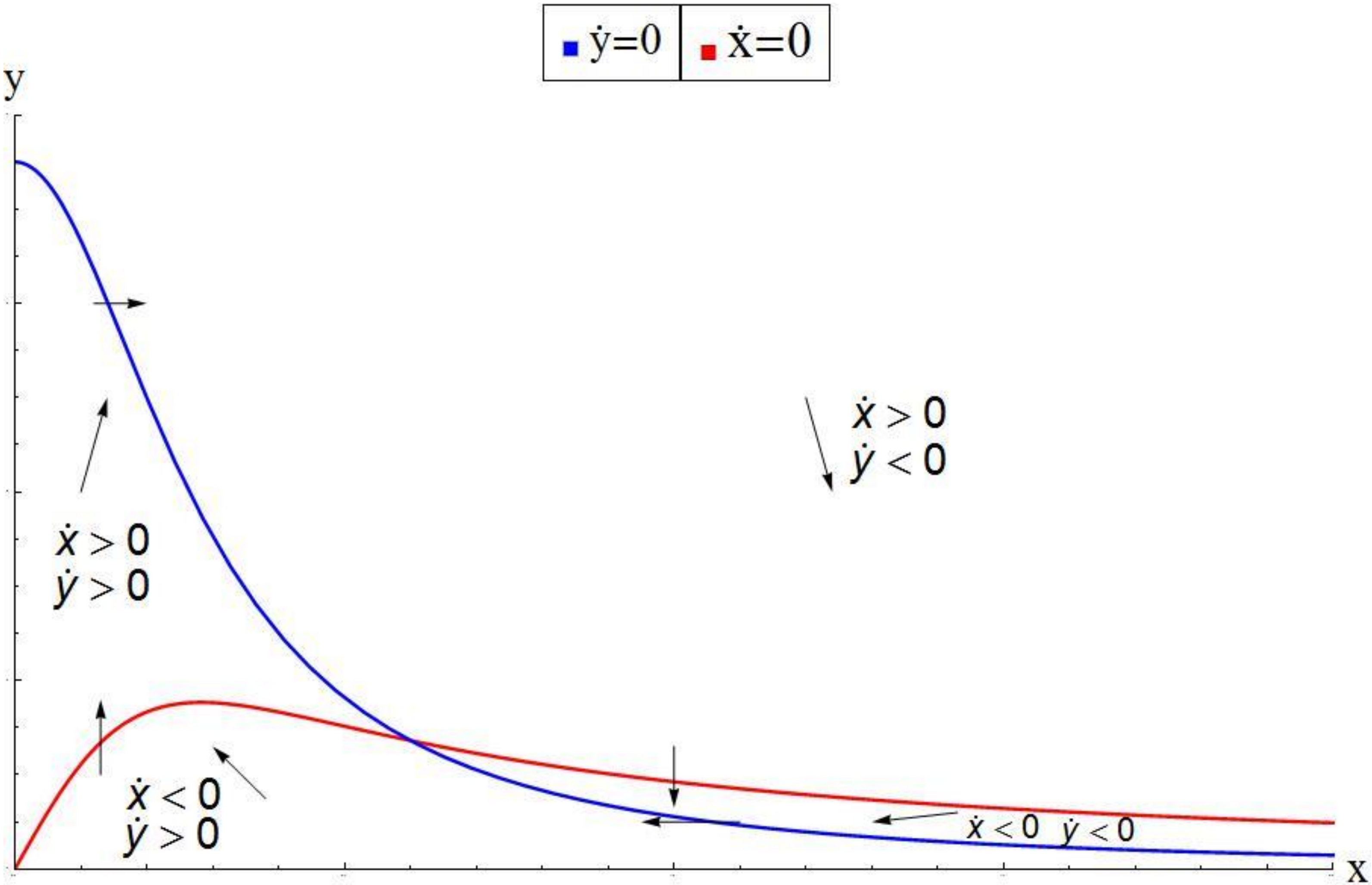
Ziel: Trapping Region finden

1. Nulllinien finden:

$$\boxed{\dot{x} = 0 \quad \text{für } y = \frac{x}{a+x^2}}$$

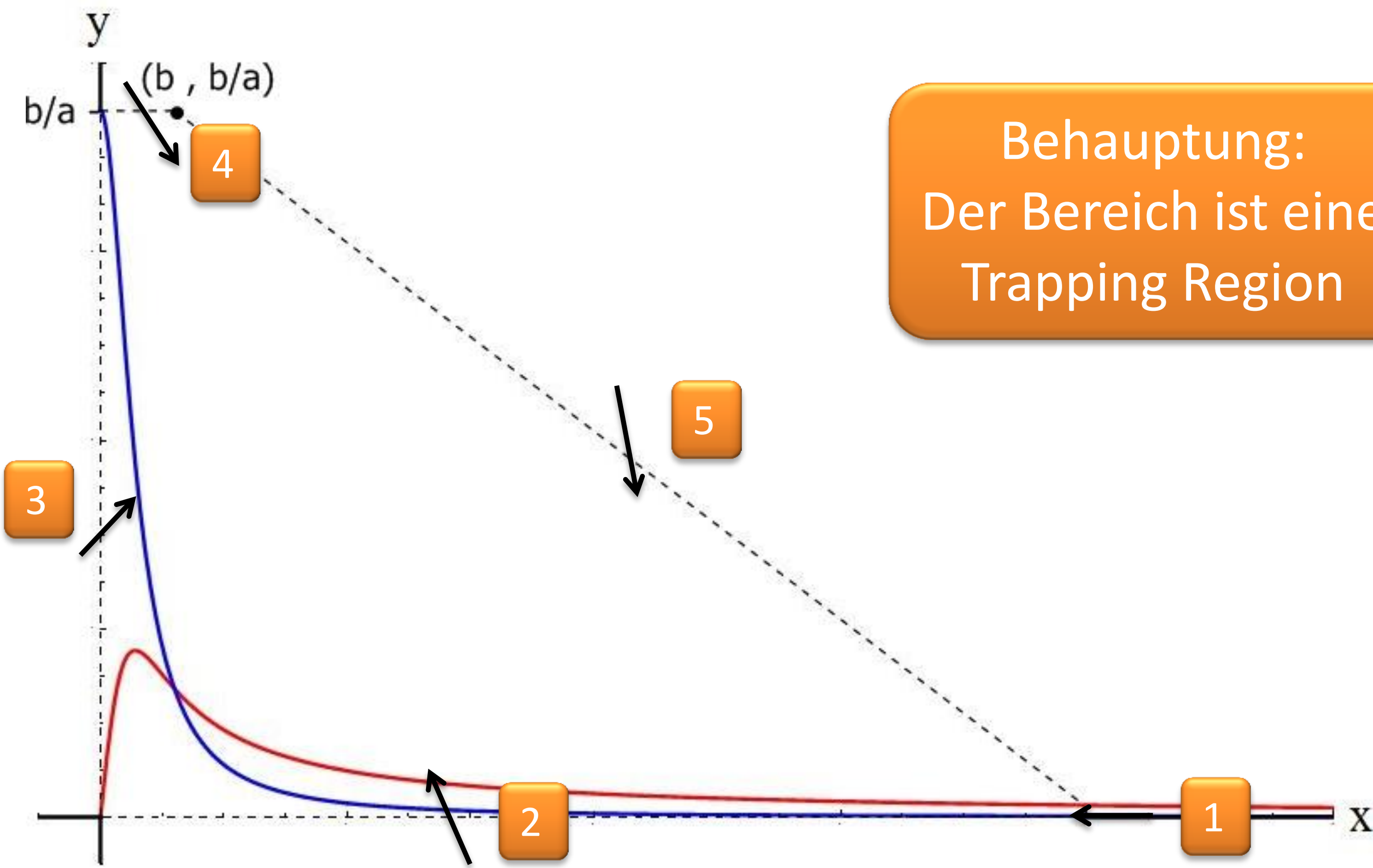
$$\boxed{\dot{y} = 0 \quad \text{für } y = \frac{b}{a+x^2}}$$

Beispiel: Glykolyse



Beispiel: Glykolyse

2. Trapping Region bestimmen



Behauptung:
Der Bereich ist eine Trapping Region

Beispiel: Glykolyse

Beweis:

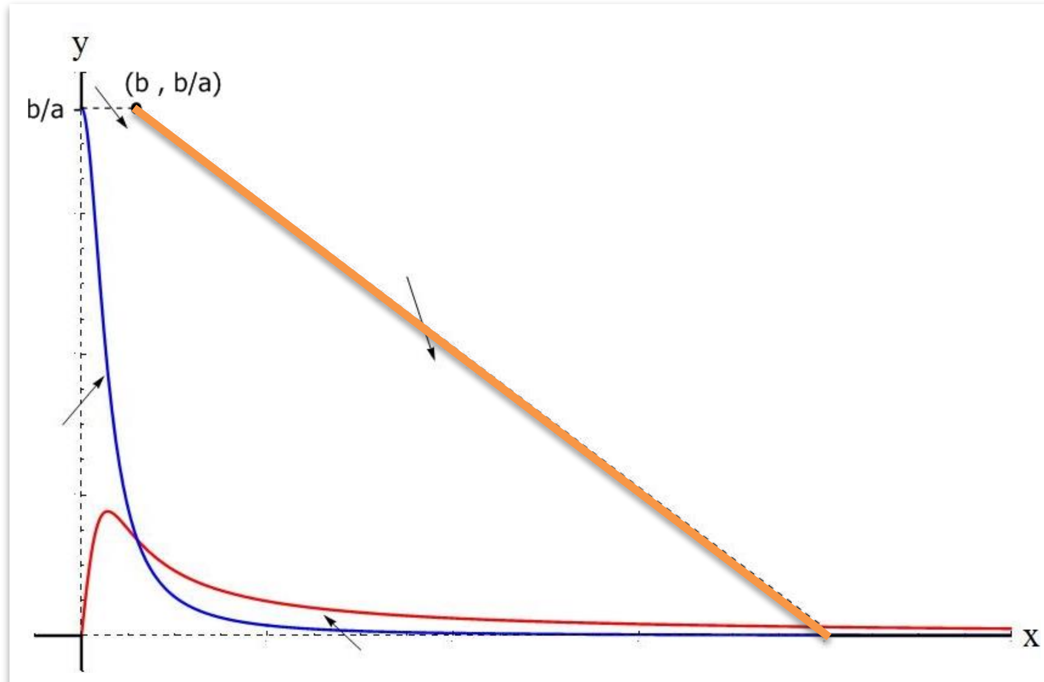
1-4 klar.

Konstruktion von 5:

Für große x gilt für $\dot{x}$ und $\dot{y}$:

$$\dot{x} = x^2 y$$
$$\dot{y} = -x^2 y$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1}$$



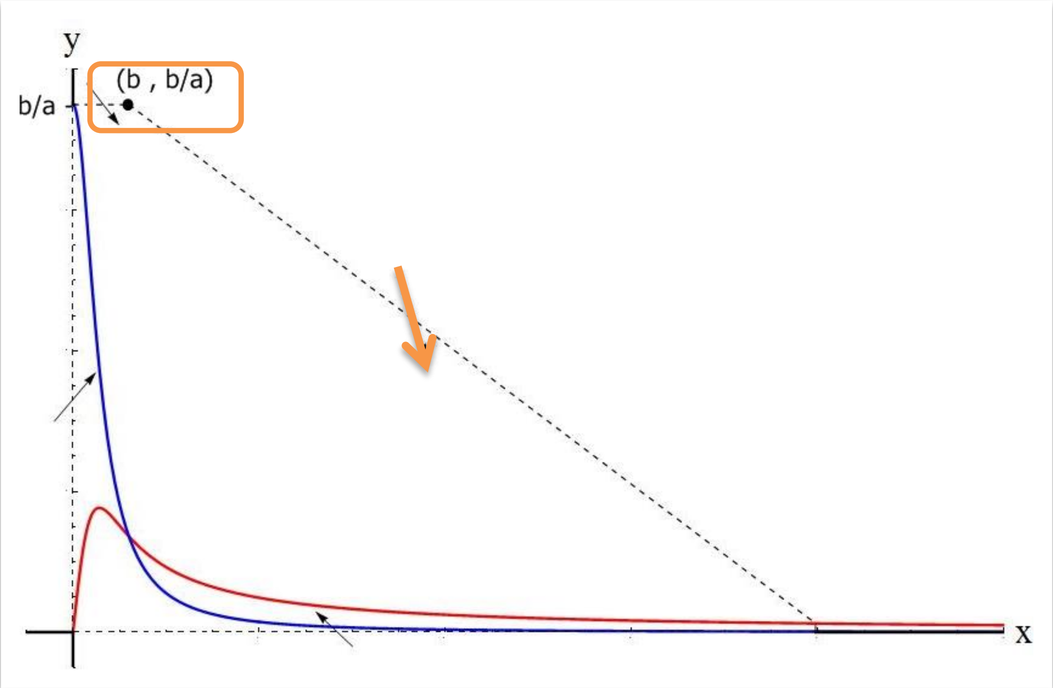
Beispiel: Glykolyse

Vergleich von $\dot{x}$ und $-\dot{y}$:

$$\dot{x} - (-\dot{y}) = b - x$$

$$\Rightarrow -\dot{y} > \dot{x} \text{ falls } \boxed{x > b}$$

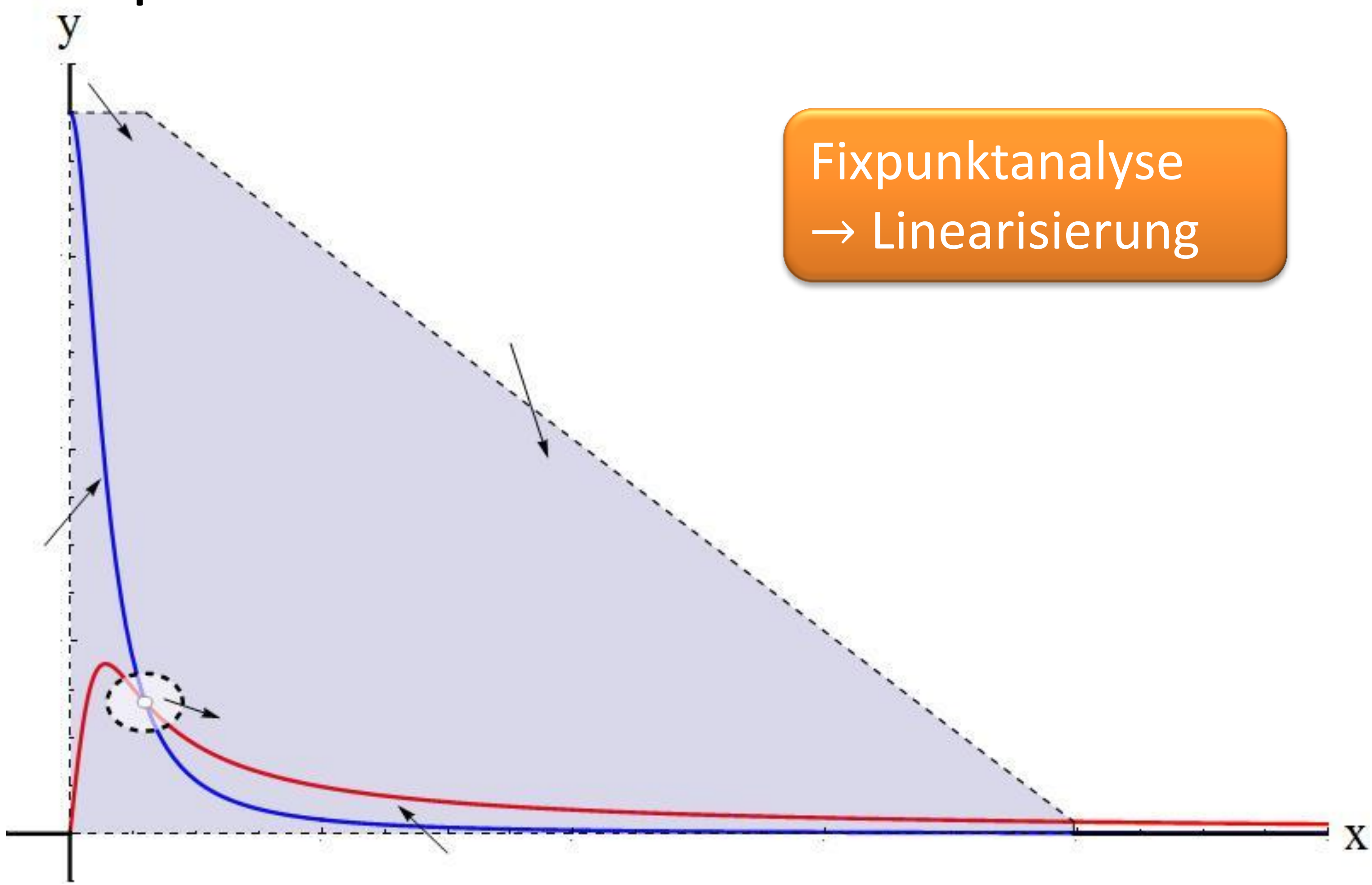
$$\boxed{\Rightarrow \frac{dy}{dx} < -1}$$



$\Rightarrow$ der Bereich ist eine **Trapping Region**

Beispiel: Glykolyse

3. Fixpunkte



Fixpunktanalyse
→ Linearisierung

Wiederholung: Linearisierung

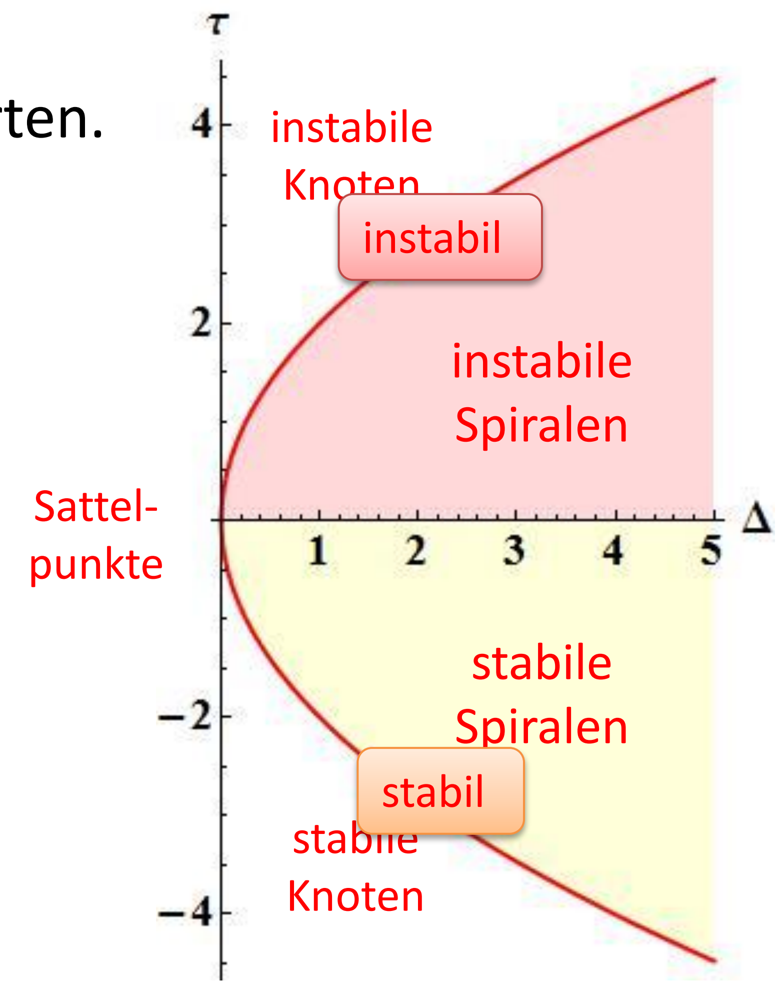
Bei nichtlinearen Systemen:

Jacobi-Matrix an Fixpunkten auswerten.

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad f(x^*,y^*) = 0$$
$$\dot{y} = g(x,y) \qquad g(x^*,y^*) = 0$$

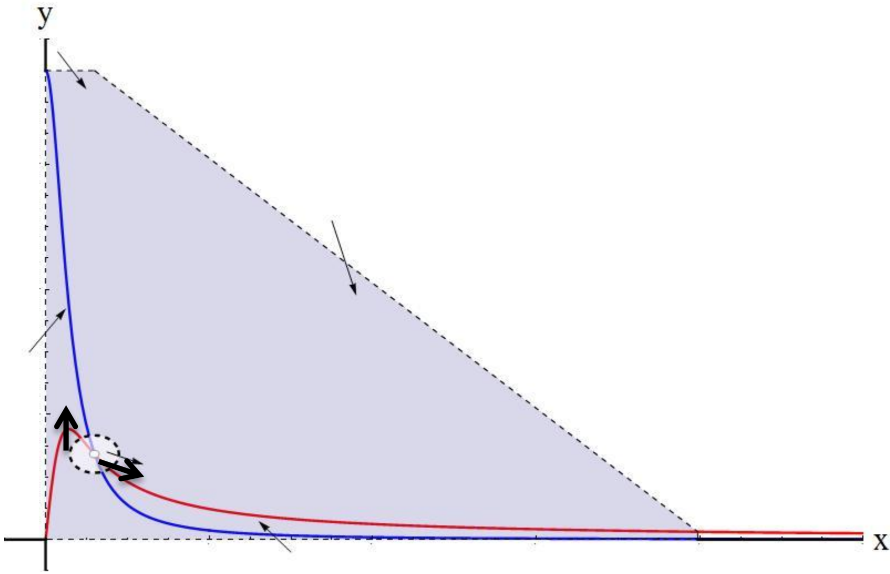
$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(x^*,y^*)}$$

Betrachte **Spur $\boldsymbol{\tau}$** und **Determinante Δ**:



Beispiel: Glykolyse

Für Grenzzyklus: Instabiler Fixpunkt
$\Rightarrow \tau(A) > 0, \Delta(A) > 0$



Fixpunkt bei $x = b$

$$y = \frac{b}{a + b^2}$$

Jacobi-Matrix am Fixpunkt:

$$A = \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{2b^2}{a + b^2} & a + b^2 \\ -\dfrac{2b^2}{a + b^2} & -(a + b^2) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Glykolyse

Determinante:

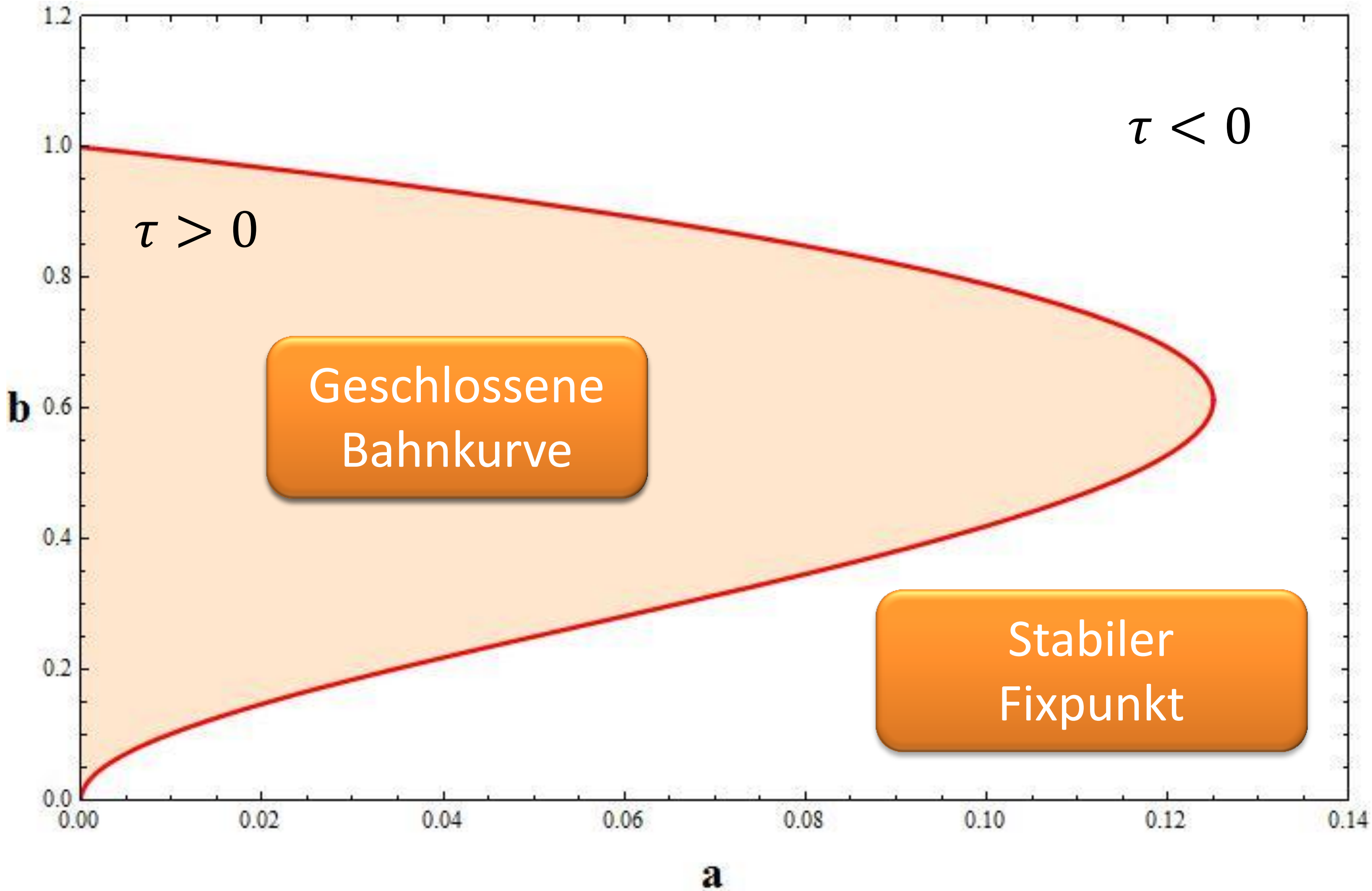
$$\Delta(A) = a + b^2 > 0$$

Spur:

$$\tau(A) = -\frac{b^4 + (2a - 1)b^2 + (a + a^2)}{a + b^2}$$

Für $\tau(A) > 0$ hat das System eine geschlossene Bahnkurve.
→ Wir können Bedingungen für a und b finden.

Beispiel: Glykolyse



Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

1. Gradientensysteme

Theorem:

Angenommen, ein System lässt sich in der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla V$ mit einer skalaren Funktion $V(\boldsymbol{x})$ ausdrücken.
Dann gibt es in diesem System keine geschlossene Bahnen.

Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

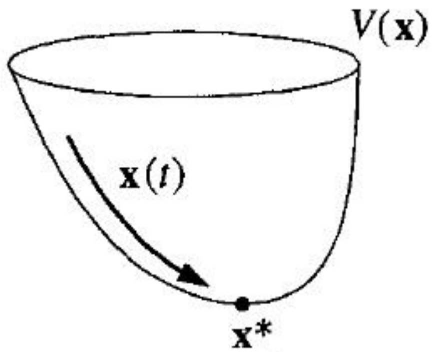
2. Liapunov-Funktionen

Definition:

Für ein System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit einem Fixpunkt bei $\boldsymbol{x}^*$ ist eine Liapunov-Funktion eine stetig differenzierbare, reelle Funktion $V(\boldsymbol{x})$, für die gilt:

i. $V(\boldsymbol{x}) > 0 \; \forall \; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ *und* $V(\boldsymbol{x}^*) = 0$

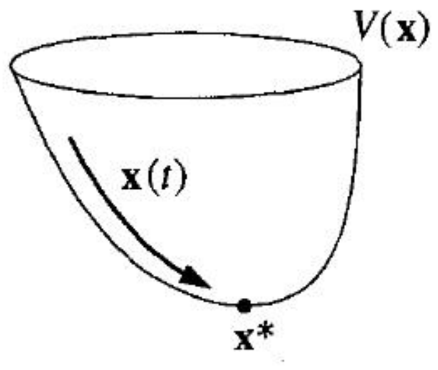
ii. $\dot{V} < 0 \; \forall \; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$



Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

Theorem:

Wenn für ein System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit einem Fixpunkt bei $\boldsymbol{x}^*$ **eine Liapunov-Funktion existiert**, ist $\boldsymbol{x}^*$ asymptotisch stabil. Damit existieren in dem System keine geschlossenen Bahnen.



Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

Beispiel:

$$\dot{x} = -x + 4y$$
$$\dot{y} = -x - y^3$$

Fixpunkt bei $(x, y) = (0,0)$

$$V(x, y) = x^2 + ay^2$$

$$\dot{V} = -2x^2 + (8 - 2a)xy - 2ay^4$$

Setze a=4.

$\Rightarrow \dot{V} = -2x^2 - 8y^4$

$\Rightarrow V > 0, \dot{V} < 0$

$\Rightarrow V$ ist **Liapunov-Funktion**.

Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

3. Dulacs Kriterium

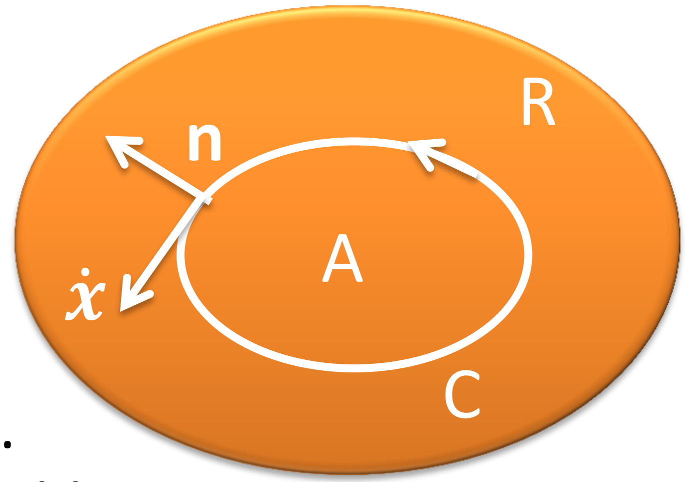
Theorem:

Es sei $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ eine stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge R einer Ebene.
Falls eine stetig differenzierbare, reelle Funktion $g(\boldsymbol{x})$ existiert, sodass $\nabla \cdot (g\dot{\boldsymbol{x}})$ **genau ein Vorzeichen** auf R hat, existieren keine geschlossenen Bahnen, die komplett in R liegen.

Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

Beweis:

Annahme:
Es existiert eine geschlossene Bahnkurve C die komplett in R liegt.
A sei die Region innerhalb von C.



Nach Greens Theorem gilt:

$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{\boldsymbol{x}})dA = \oint_C g\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$$

Linke Seite $\neq 0$
Rechte Seite $= 0$, da $\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ überall.
$\Rightarrow$Widerspruch, es kann also keine geschlossene Bahnkurve geben, die komplett in R liegt.

Methoden zum Ausschließen geschlossener Bahnen

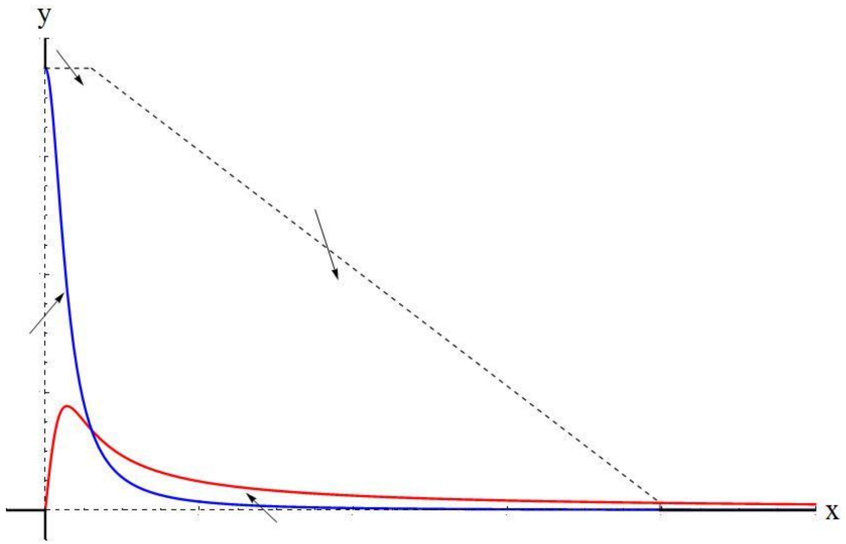
Zusammenfassung

Folgende Eigenschaften eines Systems schließen geschlossene Bahnen aus:

- Gradientensystem
- Liapunov-Funktionen
- $\nabla \cdot (g\dot{\boldsymbol{x}})$ hat genau ein Vorzeichen

Zusammenfassung

- Geschlossene Bahnkurven umschließen immer einen Fixpunkt
- Vorraussetzungen für geschlossene Bahnen in R:
  - Keine Fixpunkte in R
  - Trajektorie, die in R eingeschlossen ist
- Konzept zum Finden geschlossener Bahnen: Trapping Region



- Zur Analyse von Fixpunkten: Linearisierung

Zusammenfassung

- Zum Ausschließen geschlossener Bahnen:
  - Gradientensysteme
  - Liapunov-Funktionen
  - Dulacs Kriterium

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Quellen:

- Strogatz - Nonlinear Dynamics and Chaos
- Guckenheimer & Holmes - Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields
- http://de.wikipedia.org/wiki/Glykolyse